

Algorithms and Probability PVK

Day 2

Terms

- For Events A, B it holds:
 - $\Pr[\emptyset] = 0, \Pr[\Omega] = 1$
 - $0 \leq \Pr[A] \leq 1$
 - $\Pr[\bar{A}] = 1 - \Pr[A]$
 - If $A \subseteq B$, then $\Pr[A] \leq \Pr[B]$

Definition 2.1. Ein *diskreter Wahrscheinlichkeitsraum* ist bestimmt durch eine *Ergebnismenge* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ von *Elementarereignissen*. Jedem Elementarereignis ω_i ist eine (*Elementar-*)*Wahrscheinlichkeit* $\Pr[\omega_i]$ zugeordnet, wobei wir fordern, dass $0 \leq \Pr[\omega_i] \leq 1$ und

$$\sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega] = 1.$$

Eine Menge $E \subseteq \Omega$ heisst *Ereignis*. Die Wahrscheinlichkeit $\Pr[E]$ eines Ereignisses ist definiert durch

$$\Pr[E] := \sum_{\omega \in E} \Pr[\omega].$$

Ist E ein Ereignis, so bezeichnen wir mit $\bar{E} := \Omega \setminus E$ das *Komplementärereignis* zu E .

Laplacian Space

- Finite Probability space, with all elementary events same probability.
- In Laplacian space it holds for all events E : $Pr[E] = \frac{|E|}{|\Omega|}$

Addition Rule

- If the events $A_1, \dots, A_n$ are pairwise disjoint (for all pairs $i \neq j$ it holds that $A_i \cap A_j = \emptyset$) then:

$$\Pr \left[\bigcup_{i=1}^n A_i \right] = \sum_{i=1}^n \Pr[A_i]$$

- For infinite sets of disjoint events $A_1, A_2, \dots$ it holds that:

$$\Pr \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[A_i]$$

Inclusion Exclusion Principle

Satz 1.35. (*Siebformel, Prinzip der Inklusion/Exklusion*) Für endliche Mengen $A_1, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) gilt:

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= \sum_{l=1}^n (-1)^{l+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_l}| \\ &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \\ &\quad - \dots + (-1)^{n+1} \cdot |A_1 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$



- For $n=2$: $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$
- For $n=3$: $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

Jeweils $2^n - 1$ Terme

Inclusion Exclusion Principle

Satz 2.5. (*Siebformel, Prinzip der Inklusion/Exklusion*)

Für Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) gilt:

$$\begin{aligned} \Pr \left[\bigcup_{i=1}^n A_i \right] &= \sum_{l=1}^n (-1)^{l+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_l}] \\ &= \sum_{i=1}^n \Pr[A_i] - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2}] \\ &\quad + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}] - \dots \\ &\quad + (-1)^{n+1} \cdot \Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n]. \end{aligned}$$



Union Bound

- For Events $A_1, \dots, A_n$ holds:

$$\Pr \left[\bigcup_{i=1}^n A_i \right] \leq \sum_{i=1}^n \Pr[A_i]$$

- Events can be arbitrary. (Not pairwise disjoint)

Combinatorics

	Mit Zurücklegen	Ohne Zurücklegen
Mit Reihenfolge	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Ohne Reihenfolge	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Conditional Probability

- A and B are events with $\Pr[B] > 0$. the conditional probability $\Pr[A|B]$ of A given B is defined as

$$\Pr[A|B] := \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$$

- $\Pr[B|B] = 1$, $\Pr[B|\bar{B}] = 0$; $\Pr[A|\Omega] = \Pr[A]$; $\Pr[A|B] \sim \Pr[A \cap B]$

- 2 Children Problem

Multiplication Rule

- Let events $A_1, \dots, A_n$ be given. If $Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] > 0$:

$$Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] = Pr[A_1] \cdot Pr[A_2 | A_1] \cdot Pr[A_3 | A_1 \cap A_2] \cdot \dots \cdot Pr[A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}]$$

- $Pr[A_i | A_1 \cap \dots \cap A_{i-1}] = \frac{n - (i - 1)}{n}$

- Birthday Problem/Balls into bins
- A_i is probability, that Person i has their birthday on a day, that didn't appear before

Aufgabe 1 – *Bälle und Körbe*

Seien m, n natürliche Zahlen. Wir betrachten folgenden Prozess, der zum Beispiel verwendet werden kann, um die Auslastung von n Servern, denen m Anfragen zugeteilt werden, zu analysieren. Wir haben m Bälle $b_1, \dots, b_m$ und n Körbe $k_1, \dots, k_n$. Jeder Ball wird unabhängig von allen anderen Bällen in einen (uniform) zufälligen Korb geworfen.

Für die unten stehenden Aufgaben sollten Sie möglichst einfache Ausdrücke finden (die natürlich von m, n abhängen dürfen). Insbesondere sollten in Ihrer Lösung keine Summenzeichen vorkommen.

- (a) Beschreiben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum, der diesen Prozess beschreibt.
- (b) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Korb k_1 leer ist, nachdem alle Bälle geworfen wurden?
- (c) Sei X die Anzahl der Körbe, die leer ist nachdem der Prozess geendet hat. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X]$.
- (d) Sei Y die Anzahl Bälle, die im ersten Korb k_1 landen. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[Y]$.
- (e) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden ersten Körbe k_1, k_2 beide leer sind (nachdem alle Bälle geworfen wurden)?

Total Probability

- Let the events $A_1, \dots, A_n$ be pairwise disjoint and it holds that $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$ then:

$$Pr[B] = \sum_{i=1}^n Pr[B | A_i] \cdot Pr[A_i]$$

- Monty Hall Problem (with the goats)
- A_i : car is behind door i ; B_i : I win

Bayes Theorem

- Let the events $A_1, \dots, A_n$ be pairwise disjoint. Further let $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$ be an event with $\Pr[B] > 0$. Then it holds for arbitrary $i = 1, \dots, n$

$$\Pr[A_i | B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B | A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^n \Pr[B | A_j] \cdot \Pr[A_j]}$$

- Disease examples
- Proof: numerator: conditional probability, denominator: total probability

Exercise

Exercise 8. You are on a TV show and the questions are chosen u.a.r (uniformly at random) from a pool of questions. With probability p you know the answer, and you answer correctly. Otherwise, you guess, and you give the right answer with probability $1/4$. What is the probability that you answer correctly to a randomly chosen question?

PDF & CDF

• $f_x : \mathbb{R} \rightarrow [0,1], x \mapsto \Pr[X = x]$ *Dichte*

• $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0,1], x \mapsto \Pr[X \leq x] = \sum_{x' \in W_x : x' \leq x} \Pr[X = x']$ *Verteilung*



