Algorithmen & Wahrscheinlichkeit

Übungsstunde 7

Michelle Honegger - ML F34

Programm

- Feedback Peergrading/Serien
- Theory Recap
- Aufgaben
- Kahoot

Feedback Peergrading/Serien

- Peergrading: Mehr als nur gut schreiben. Irgendein Feedback mit Substanz um Punkte zu erhalten.
- Serien: Wenn möglich Sätze und Lemmata aus Vorlesung benutzen. Angeben welcher Satz benutzt wurde.

Intuition Unabhängigkeit

- Abhängig wenn:
  - Eine Variable aus der anderen Konstruiert
  - Gemeinsame Ursache
  - Eines schränkt das andere ein
- Unabhängig wenn:
  - Kein gemeinsamer Mechanismus
  - Getrennte Experimente

(a) For each of the following subtasks, either define a probability space and events A and B (and C) with the described properties, or prove that such a space cannot exist. Make sure that you define both, the sample space ("Ergebnismenge") Ω and the probabilities of the atomic events ("Elementarereignisse").

(i) $\Pr[A] = \frac{1}{4}$, $\Pr[B] = \frac{1}{3}$ and $\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B]$.

(ii) $\Pr[A] = \frac{1}{4}$, $\Pr[B] = \frac{1}{3}$ and $\Pr[A \cup B] < \Pr[A] + \Pr[B]$.

(iii) $\Pr[A] = \Pr[B]$, $\Pr[A \cap B] = \frac{1}{4}$, and $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$ (that is A and B are independent).

(iv) $\Pr[A] = \Pr[B] = \Pr[C] = \frac{5}{6}$ and $\Pr[A \cap B \cap C] = 0$.

(b) Samantha has a fair, six-sided die and a 5 CHF coin. She rolls the die and tosses the coin. Samantha considers her experiment a success if the coin shows a strictly larger value than the die (for the coin, heads is counted as 0; tails is counted as 5). Model her experiment with a suitable probability space. Explicitly define the event A that the experiment is a success and determine its probability $\Pr[A]$.

(c) Oliver owns three pairs of shoes – two blue pairs, and one yellow, which he stores unordered in his wardrobe. One morning, during a power outage, he has to put on his shoes in complete darkness. He randomly (uniformly at random) grabs two shoes from the wardrobe and tries to put them on.

We let A denote the event that he picked one left shoe and one right shoe (i.e. he is able to put on the shoes he picked), and we let B be the event that the two shoes he picked have the same color.

Model this setting as a probability space and compute $\Pr[A]$ and $\Pr[A|B]$.

Varianz

Definition 2.39. Für eine Zufallsvariable X mit $\mu = \mathbb{E}[X]$ definieren wir die *Varianz* Var[X] durch

$$\mathrm{Var}[X] := \mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \sum_{x \in W_X} (x-\mu)^2 \cdot \Pr[X = x].$$

Die Grösse $\sigma := \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$ heisst *Standardabweichung* von X.

- Für eine beliebige Zufallsvariable X gilt:
  $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$
- Für eine beliebige Zufallsvariable X und a,b $\in \mathbb{R}$ gilt:
  $Var[a \cdot X + b] = a^2 \cdot Var[X]$

Kahoot

https://play.kahoot.it/v2/?quizId=61a7a7fd-2ee1-41dd-ac00-85a182a356ec&hostId=c89c5518-7931-4c0d-a975-6b14865c8648

Bernoulliverteilung

Bernoulli	$\mathrm{Bernoulli}(p)$	$\{0,1\}$	$f_X(i) = \begin{cases} p & \text{für } i = 1, \\ 1-p & \text{für } i = 0. \end{cases}$	p	$p(1-p)$

- Ein Münzwurf
- Zufallsexperimente mit Indikatorvariable. Bsp: Münzwurf: Indikator für Zahl.

Binomialverteilung

Binomial	$\mathrm{Bin}(n, p)$	$\{0, 1, \ldots, n\}$	$f_X(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$	np	$np(1-p)$

- Werfen Ball n-Mal
- Anzahl Bälle in Korb i
- W'keit k Bälle in Korb i

Geometrische Verteilung

Geometrisch	$\mathrm{Geo}(p)$	$\mathbb{N}$	$f_X(i) = p(1-p)^{i-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$

- Warten auf den ersten Erfolg
- W'keit k mal werfen zu müssen
- Gedächtnislosigkeit

Negativ Binomialverteilung

- Warten auf den n-ten Erfolg

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = n/p.$$

$$f_Z(z) = \binom{z-1}{n-1} \cdot p^n (1-p)^{z-n}.$$

Coupon Collector

- Problem: n verscheidene Coupons und in jeder Runde erhält man eins gleichverteilt
- X := Anzahl Runden bis wir alle Coupons haben
- Ansatz: Problem in Phasen aufteilen: 1 Phase symbolisiert Zeit, von i-1 bis i Coupons gesammelt
- Insgesamt: $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} = n \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = n \cdot H_n$ $\quad H_n = ln(n) + O(1)$
- Besser sich am Ende Coupons schenkenzu lassen, als am Anfang

Aufgabe 3 – *Fische im Teich*

Sie haben einen Teich mit n Lachsen und n Forellen. Sie haben einen Kescher, mit dem Sie Fische aus dem Teich fangen wollen. Jedes Mal wenn Sie einen Fisch fangen, fangen Sie einen Fisch zufällig gleichverteilt aus allen noch im Teich vorhandenen Fischen. Sie wollen nun für eine Grillparty alle Lachse fangen, um diese zu grillen. Da Sie die Forellenpopulation in Ihrem Teich erhalten wollen, werfen Sie jedes Mal, wenn Sie eine Forelle gefangen haben, diese zurück in den Teich (die Tiere leiden hierunter nicht!). Zeigen Sie, dass Sie in der Erwartung $\sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{i}$ Fische fangen müssen, um alle Lachse zu fangen. *(5 Punkte)*

Poissonverteilung

Poisson	$\text{Po}(\lambda)$	$\mathbb{N}_0$	$f_X(i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$	λ	λ

- Modelliert seltene Ereignisse
- Anzahl Experimente sehr gross, und Erfolgsw'keit λ/#Versuche
- Gedächtnislosigkeit

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Definition 2.52. Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ heissen unabhängig genau dann, wenn für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in W_{X_1} \times \ldots \times W_{X_n}$ gilt

$$\Pr[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = \Pr[X_1 = x_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[X_n = x_n].$$

Rechenregeln für Momente

- $\mathbb{E}[X+Y]=\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y]$ Stimmt für alle X und Y
- $\mathbb{E}[X\cdot Y]=\mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y]$ Stimmt, wenn X und Y unabhängig
- $Var[X+Y]=Var[X]+Var[Y]$ Stimmt, wenn X und Y unabhängig
- $Var[X\cdot Y]=Var[X]\cdot Var[Y]$ Stimmt im allgemeinen nicht

Aufgabe 1 – *Bälle und Körbe*

Seien m, n natürliche Zahlen. Wir betrachten folgenden Prozess, der zum Beispiel verwendet werden kann, um die Auslastung von n Servern, denen m Anfragen zugeteilt werden, zu analysieren. Wir haben m Bälle $b_1, \ldots, b_m$ und n Körbe $k_1, \ldots, k_n$. Jeder Ball wird unabhängig von allen anderen Bällen in einen (uniform) zufälligen Korb geworfen.

Für die unten stehenden Aufgaben sollten Sie möglichst einfache Ausdrücke finden (die natürlich von m, n abhängen dürfen). Insbesondere sollten in Ihrer Lösung keine Summenzeichen vorkommen.

(a) Beschreiben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum, der diesen Prozess beschreibt.

(b) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Korb k_1 leer ist, nachdem alle Bälle geworfen wurden?

(c) Sei X die Anzahl der Körbe, die leer ist nachdem der Prozess geendet hat. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X]$.

(d) Sei Y die Anzahl Bälle, die im ersten Korb k_1 landen. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[Y]$.

(e) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden ersten Körbe k_1, k_2 beide leer sind (nachdem alle Bälle geworfen wurden)?