

Algorithmen & Wahrscheinlichkeit

Übungsstunde 6

Minitest

- Passwort: probability
- Zeit: 10 minutes
- Anzahl Fragen: 10
- 0.2 Punkte pro richtig beantwortete Frage

Programm

- Minitest
- Theory Recap
- Kahoot!
- InClass Exercise

Minitest 3

Teil 1

- Drei Ereignisse A , B , C sind genau dann unabhängig, wenn $P[A \cap B \cap C] = P[A] \cdot P[B] \cdot P[C]$.
- Für drei beliebige Ereignisse A , B , C gilt $P[A \cup B \cup C] = P[A] + P[B] + P[C] - P[A \cap B] - P[A \cap C] - P[B \cap C] + P[A \cap B \cap C]$
- Wir betrachten folgendes Zufallsexperiment: Wir werden zunächst einen 6-seitigen Würfel und danach eine Münze. Dieses Zufallsexperiment lässt sich mit der Ergebnismenge $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,K,Z\}$ beschreiben.

Minitest 3

Teil 2

- Für zwei beliebige Ereignisse A, B mit $P[A] > 0$ und $P[B] > 0$ gilt $P[A | B] \cdot P[B] = P[B | A] \cdot P[A]$.
- Man wirft einen sechsseitigen Würfel. Dann sind die Ereignisse "A = Ergebnis ist gerade" und "B = Ergebnis ist 6" unabhängig.
- Wenn A, B, C drei Ereignisse sind, die $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B], P[A \cap C] = P[A] \cdot P[C], P[B \cap C] = P[B] \cdot P[C]$ erfüllen, dann sind A, B, C unabhängig
- Wenn A, B, C drei unabhängige Ereignisse sind, dann $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B], P[A \cap C] = P[A] \cdot P[C], P[B \cap C] = P[B] \cdot P[C]$

Minitest 3

Teil 3

- Wir haben 180 zufällig ausgewählte Personen in einem Raum. Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei von ihnen am selben Tag Geburtstag haben, ist kleiner $1/2$.
- Angenommen, g ist ein Graph, der eine Eulertour enthält, und die Anzahl Knoten von G ist gerade. Dann enthält G ein perfektes Matching.
- Wenn A und B unabhängige Ereignisse sind, dann ist $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

- A und B seien Ereignisse mit $\Pr[B] > 0$. Die bedingte W'keit $\Pr[A|B]$ von A gegeben B ist definiert durch

$$\Pr[A|B] := \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$$

- $\Pr[B|B] = 1$, $\Pr[B|\bar{B}] = 0$; $\Pr[A|\Omega] = \Pr[A]$; $\Pr[A|B] \sim \Pr[A \cap B]$

- Kinderproblem

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

- Die Ereignisse A_1, \dots, A_n seien paarweise disjunkt und es gelte $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$. Dann folgt:

$$Pr[B] = \sum_{i=1}^n Pr[B | A_i] \cdot Pr[A_i]$$

- Ziegenproblem
- A_i : Auto ist hinter Tür i ; B_i : Ich gewinne

Satz von Bayes

- Die Ereignisse A_1, \dots, A_n seien paarweise disjunkt. Ferner sei $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$ ein Ereignis mit $\Pr[B] > 0$. Dann gilt für ein beliebiges $i = 1, \dots, n$

$$\Pr[A_i | B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B | A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^n \Pr[B | A_j] \cdot \Pr[A_j]}$$

- Krankheitenbsp.
- Beweis: Zähler Bedingte Wahrscheinlichkeit, Nenner: Satz der totalen W'keit

Satz von Bayes Aufgabe

- Eine Firma benutzt eine KI um emails als "**wichtig**" oder "**unwichtig**" zu klassifizieren.
 - 30% der Emails sind wichtig.
 - Das System markiert eine wichtige Mail in 80% der Fälle als wichtig.
 - Das System markiert eine unwichtige Mail in 20% der Fälle als wichtig.
- **Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine als wichtig markierte Mail tatsächlich wichtig ist?**

Unabhängigkeit

- Ereignisse A und B sind unabhängig gdw. Eintritt von B beeinflusst nicht ob A eintritt:
$$Pr[A \cap B] = Pr[A] \cdot Pr[B]$$
- Die Ereignisse A_1, \dots, A_n heißen unabhängig, wenn für alle Teilmengen $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ gilt, dass
$$Pr[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}] = Pr[A_{i_1}] \cdot \dots \cdot Pr[A_{i_k}].$$

Eine unendliche Familie von Ereignissen A_i mit $i \in \mathbb{N}$ heisst unabhängig für jede endliche Teilmenge $I \subseteq \mathbb{N}$ erfüllt ist
- Seien A , B und C unabhängige Ereignisse. Dann sind auch $A \cap B$ und C bzw. $A \cup B$ und C unabhängig

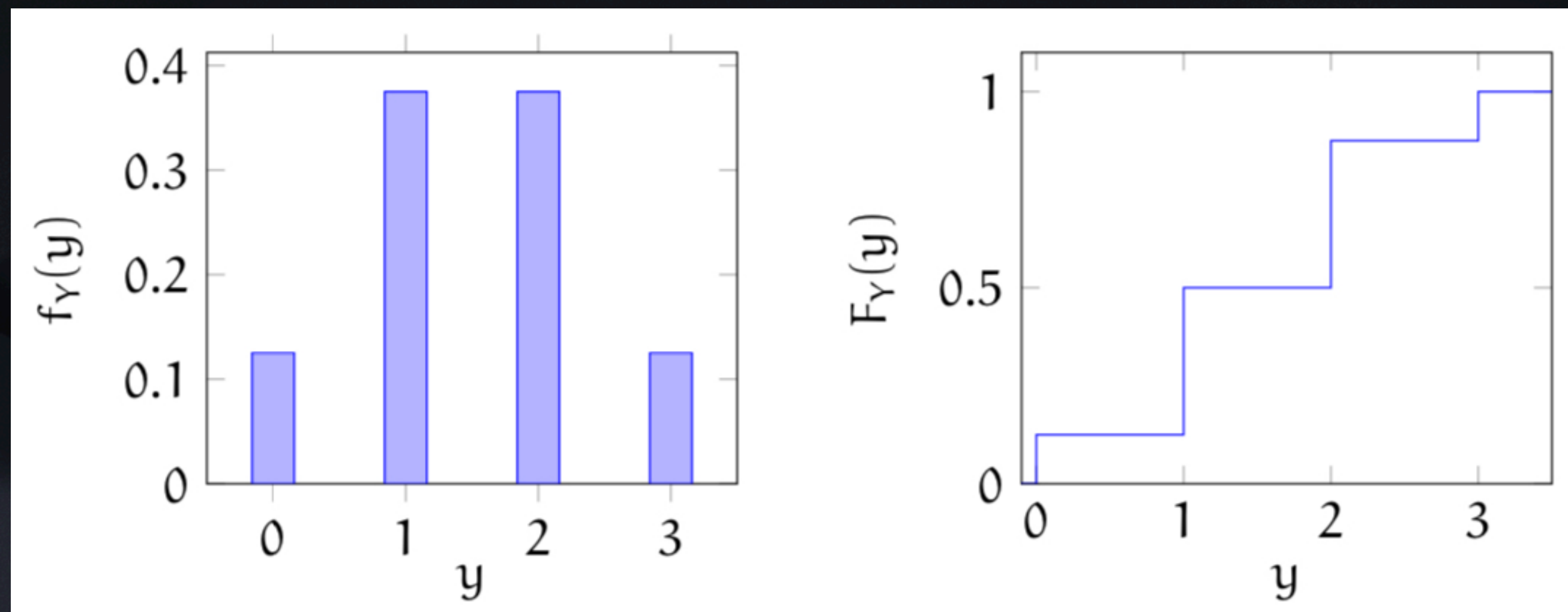
Zufallsvariablen

- Eine Zufallsvariable ist eine Abbildung $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, wobei Ω die Ergebnismenge eines Wahrscheinlichkeitsraumes ist.
- Bei diskreten W'keitsräumen Wertebereich endlich oder abzählbar unendlich
- W'keit, dass X einen bestimmten Wert annimmt
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} Pr[X \geq i]$$

Dichte und Verteilung

• $f_x : \mathbb{R} \rightarrow [0,1], x \mapsto \Pr[X = x]$ **Dichte**

• $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0,1], x \mapsto \Pr[X \leq x] = \sum_{x' \in W_x : x' \leq x} \Pr[X = x']$ **Verteilung**



Erwartungswert

- Zu einer Zufallsvariablen X definieren wir den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ durch:

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in W_X} x \cdot Pr[X = x],$$

sofern die Summe absolut konvergiert. Ansonsten sagen wir, dass der Erwartungswert undefiniert ist. (Wichtig für unendliche W 'keitsräume)

- Ist X eine Zufallsvariable, so gilt: $\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot Pr[\omega]$

- (Sei X eine Zufallsvariable mit $W_X \subseteq \mathbb{N}_0$. Dann gilt $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} Pr[X \geq i]$)

Linearität des Erwartungswerts

- Für Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n und $X := a_1X_1 + \dots + a_nX_n + b$ mit $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\mathbb{E}[X] = a_1\mathbb{E}[X_1] + \dots + a_n\mathbb{E}[X_n] + b$$

Wir betrachten zwei Zufallsvariablen:

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Summe:

$$X + Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega \mapsto X(\omega) + Y(\omega)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X + Y] &\stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{\omega \in \Omega} (X + Y)(\omega) \cdot \Pr[\omega] \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) + Y(\omega)) \cdot \Pr[\omega] \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \Pr[\omega] + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \cdot \Pr[\omega] \\ &= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] \end{aligned}$$

Kahoot!

- <https://play.kahoot.it/v2/?quizId=2bbecae7-f391-417f-a96a-de91c4984cfa&hostId=c89c5518-7931-4c0d-a975-6b14865c8648>

Indikatorvariablen

- $I_{A \cap B} = I_A \cdot I_B$
- $I_{\bar{A}} = 1 - I_A$
- $I_{A \cup B} =$ Siebformel
(nicht addieren!)

Beobachtung Für ein Ereignis $A \subseteq \Omega$ ist die zugehörige *Indikatorvariable* X_A definiert durch:

$$X_A(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für den Erwartungswert von X_A gilt: $E[X_A] = \Pr[A]$.

Verteiltes Rechnen - Stabile Menge

- Ziel: Rechner lösen gemeinsam eine Aufgabe
- Stabile Menge: Grösste Teilmenge von Knoten, die nicht mit einer Kante verbunden sind
- Vorgehen:
 - Jeder Knoten mit W'keit p , ob er da bleibt oder nicht.
 - Knoten, die noch Kanten zu anderen Knoten haben löschen jeweils durch Abmachung 1 Knoten

Verteiltes Rechnen - Stabile Menge

- Satz: Für jeden Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| = n$ und $|E| = m$, bestimmt der Algorithmus eine stabile Menge S mit $\mathbb{E}[|S|] \geq np - mp^2$
- Beweis:
 - $X :=$ Anzahl Knoten, die die erste Runde überleben
 - $Y :=$ Anzahl Kanten, die die erste Runde überleben
 - $|S| \geq X - Y$
- Für jeden Graphen gibt es eine stabile Menge von mind. $n^2/4m$

- (a) For each of the following subtasks, either define a probability space and events A and B (and C) with the described properties, or prove that such a space cannot exist. Make sure that you define both, the sample space (“Ergebnismenge”) Ω and the probabilities of the atomic events (“Elementarereignisse”).
- (i) $\Pr[A] = \frac{1}{4}$, $\Pr[B] = \frac{1}{3}$ and $\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B]$.
 - (ii) $\Pr[A] = \frac{1}{4}$, $\Pr[B] = \frac{1}{3}$ and $\Pr[A \cup B] < \Pr[A] + \Pr[B]$.
 - (iii) $\Pr[A] = \Pr[B]$, $\Pr[A \cap B] = \frac{1}{4}$, and $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$ (that is A and B are independent).
 - (iv) $\Pr[A] = \Pr[B] = \Pr[C] = \frac{5}{6}$ and $\Pr[A \cap B \cap C] = 0$.
- (b) Samantha has a fair, six-sided die and a 5 CHF coin. She rolls the die and tosses the coin. Samantha considers her experiment a success if the coin shows a strictly larger value than the die (for the coin, heads is counted as 0; tails is counted as 5). Model her experiment with a suitable probability space. Explicitly define the event A that the experiment is a success and determine its probability $\Pr[A]$.

(c) Oliver owns three pairs of shoes – two blue pairs, and one yellow, which he stores unordered in his wardrobe. One morning, during a power outage, he has to put on his shoes in complete darkness. He randomly (uniformly at random) grabs two shoes from the wardrobe and tries to put them on.

We let A denote the event that he picked one left shoe and one right shoe (i.e. he is able to put on the shoes he picked), and we let B be the event that the two shoes he picked have the same color.

Model this setting as a probability space and compute $\Pr[A]$ and $\Pr[A|B]$.