

Algorithmen & Wahrscheinlichkeit

Übungsstunde 5

Programm

- Theory Recap
- Kahoot
- Aufgaben

Grundbegriffe

- Für Ereignisse A, B gilt:
 - $\Pr[\emptyset] = 0, \Pr[\Omega] = 1$
 - $0 \leq \Pr[A] \leq 1$
 - $\Pr[\bar{A}] = 1 - \Pr[A]$
 - Wenn $A \subseteq B$, so folgt $\Pr[A] \leq \Pr[B]$

Definition 2.1. Ein *diskreter Wahrscheinlichkeitsraum* ist bestimmt durch eine *Ergebnismenge* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ von *Elementarereignissen*. Jedem Elementarereignis ω_i ist eine (*Elementar-*)*Wahrscheinlichkeit* $\Pr[\omega_i]$ zugeordnet, wobei wir fordern, dass $0 \leq \Pr[\omega_i] \leq 1$ und

$$\sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega] = 1.$$

Eine Menge $E \subseteq \Omega$ heisst *Ereignis*. Die Wahrscheinlichkeit $\Pr[E]$ eines Ereignisses ist definiert durch

$$\Pr[E] := \sum_{\omega \in E} \Pr[\omega].$$

Ist E ein Ereignis, so bezeichnen wir mit $\bar{E} := \Omega \setminus E$ das *Komplementärereignis* zu E .

Laplace-Raum

- Endlicher W'keitsraum, in dem alle Elementarereignisse die Gleiche W'keit haben.
- In einem Laplace Raum gilt für jedes Ereignis E : $Pr[E] = \frac{|E|}{|\Omega|}$

Additionssatz

- Wenn die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ paarweise disjunkt sind (also wenn für alle Paare $i \neq j$ gilt, dass $A_i \cap A_j = \emptyset$) so gilt:

$$\Pr \left[\bigcup_{i=1}^n A_i \right] = \sum_{i=1}^n \Pr[A_i]$$

- Für eine unendliche Menge von disjunkten Ereignissen $A_1, A_2, \dots$ gilt analog:

$$\Pr \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[A_i]$$

Siebformel

Satz 1.35. (*Siebformel, Prinzip der Inklusion/Exklusion*) Für endliche Mengen $A_1, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) gilt:

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= \sum_{l=1}^n (-1)^{l+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_l}| \\ &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \\ &\quad - \dots + (-1)^{n+1} \cdot |A_1 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$

- Für $n=2$: $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$
- Für $n=3$: $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

Jeweils $2^n - 1$ Terme



Siebformel

Satz 2.5. (*Siebformel, Prinzip der Inklusion/Exklusion*)

Für Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) gilt:

$$\begin{aligned}\Pr \left[\bigcup_{i=1}^n A_i \right] &= \sum_{l=1}^n (-1)^{l+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_l}] \\ &= \sum_{i=1}^n \Pr[A_i] - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2}] \\ &\quad + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}] - \dots \\ &\quad + (-1)^{n+1} \cdot \Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n].\end{aligned}$$



Boolesche Ungleichung/Union Bound

- Für Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ gilt:

$$\Pr \left[\bigcup_{i=1}^n A_i \right] \leq \sum_{i=1}^n \Pr[A_i]$$

- Hier können Ereignisse beliebig sein. (Nicht paarweise disjunkt)

Kombinatorik

	Mit Zurücklegen	Ohne Zurücklegen
Mit Reihenfolge	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Ohne Reihenfolge	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

- A und B seien Ereignisse mit $\Pr[B] > 0$. Die bedingte W'keit $\Pr[A|B]$ von A gegeben B ist definiert durch

$$\Pr[A|B] := \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$$

- $\Pr[B|B] = 1$, $\Pr[B|\bar{B}] = 0$; $\Pr[A|\Omega] = \Pr[A]$; $\Pr[A|B] \sim \Pr[A \cap B]$

- Kinderproblem

Multiplikationssatz

- Seien die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ gegeben. Falls $Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] > 0$:

$$Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] = Pr[A_1] \cdot Pr[A_2 | A_1] \cdot Pr[A_3 | A_1 \cap A_2] \cdot \dots \cdot Pr[A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}]$$

- $Pr[A_i | A_1 \cap \dots \cap A_{i-1}] = \frac{n - (i - 1)}{n}$

- Geburtstagsproblem/Balls into bins
- A_i ist W'keit, dass Person i an einem Tag Geburtstag hat, der noch nicht vorkam

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

- Die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ seien paarweise disjunkt und es gelte $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$. Dann folgt:

$$Pr[B] = \sum_{i=1}^n Pr[B | A_i] \cdot Pr[A_i]$$

- Ziegenproblem
- A_i : Auto ist hinter Tür i ; B_i : Ich gewinne

Kahoot!

- <https://play.kahoot.it/v2/?quizId=21444b7b-4420-4b00-965f-7d0e023e68f8&hostId=c89c5518-7931-4c0d-a975-6b14865c8648>

Exercise S5.1 – 3-colorable graphs

In the lecture you have seen an algorithm that finds an $O\left(\sqrt{|V|}\right)$ -coloring for every 3-colorable graph (V, E) . Fix $\alpha = \sqrt{|V|}$. The algorithm goes as follows.

1. While there is a vertex v with degree at least α , color v with a new color, color the neighbors of v with two additional new colors, and delete v and all its neighbors from the graph.
2. Color all remaining vertices with at most $\alpha + 1$ colors.

We want to analyze and generalize this algorithm.

- (a) Where in the algorithm do we use that the graph is 3-colorable?
- (b) How many colors do we need at most (depending on α)? Show that for $\alpha = \sqrt{|V|}$ we only need $O\left(\sqrt{|V|}\right)$ colors.
- (c) Show that your bound in (a) is tight. More precisely, create a 3-colorable graph on which the algorithm uses $\Omega\left(\sqrt{|V|}\right)$ colors.
- (d) Can you describe an algorithm that finds a $O\left(|V|^{\frac{2}{3}}\right)$ -coloring for every 4 colorable graph?
- (e) Can you describe an algorithm that finds a $O\left(|V|^{\frac{q-2}{q-1}}\right)$ -coloring for every q colorable graph, where $q \geq 2$ is a constant?