

Algorithmen & Wahrscheinlichkeit

Übungsstunde 4

Minitest

- Passwort: tree
- Time limit: 10 Minuten
- Anzahl Fragen: 10
- 0.2 Punkte pro richtige Antwort

Minitest

- Jeder k -reguläre bipartite Graph $G=(A \cup B, E)$ für $k \geq 1$ hat ein Matching der Grösse $|A|$.
- Das (kardinalitäts-) maximale Matching in einem bipartite Graphen kann in der Zeit $O(\sqrt{|V|} \cdot |E|)$ gefunden werden.
- Jeder Graph ohne Dreieck hat eine chromatische Zahl von höchstens 100.
- Wenn G ein bipartite Graph ist und M in G ein Matching aufweist, das nicht kardinalitätsmaximal ist, dann gibt es in G einen augmentierenden Pfad bezüglich M .

Minitest

- Wenn G ein zusammenhängender Graph mit einem maximalen Grad von 100 ist, dann hat G eine korrekte Einfärbung in 100 Farben, es sei denn, G ist ein vollständiger Graph.
- Für einen vollständigen Graphen G mit gerader Anzahl von Knoten und positiven Gewichten $l(x,y)$, der die Dreiecksungleichung erfüllt, sei M die minimale Kosten-perfekte Paarung und C die minimale Kosten-Reise des Handlungsreisenden. Dann ist $l(M) \leq l(C)/2$
- Ist G ein Graph mit maximalen Grad $\Delta(G)$, so findet ein Greedy Algorithmus stets eine zulässige Färbung mit höchstens $\Delta(G) + 1$ Farben

Minitest

- Jeder Kreis ist 2-färbbar.
- Es gibt einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit, der eine 1.5-Approximation für das metrische Problem des Handlungsreisenden findet.
- Es gibt einen polynominellen Algorithmus, der für jeden Planaren Graphen eine geeignete Einfärbung mit 6 Farben findet.

Programm

- Minitest
- Fragen/Feedback/Repetition
- Theory Recap
 - Färbungen
 - Beweise von letzter Woche
- Aufgaben

Färbungen

- Eine Knotenfärbung eines Graphen $G = (V, E)$ mit k Farben ist eine Abbildung $c : V \rightarrow [k]$, so dass gilt $c(u) \neq c(v)$ für alle Kanten $\{u, v\} \in E$
- Die **chromatische Zahl** $\chi(G)$ ist die minimale Anzahl Farben, die für eine Knotenfärbung von G benötigt wird.
- bipartit lässt sich in $O(|E|)$ mit DFS/BFS rausfinden
- Für jedes $k \geq 3$ ist das Problem: Gegeben ein Graph $G = (V, E)$, gilt $\chi(G) \leq k$? NP-vollständig

Färbungen

Greedy Algorithmus

- Für jede Reihenfolge benötigt der Greedy-Algorithmus höchstens $\Delta(G)+1$ viele Farben

GREEDY-FÄRBUNG (G)

```
1: wähle eine beliebige Reihenfolge der Knoten:  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ 
2:  $c[v_1] \leftarrow 1$ 
3: for  $i = 2$  to  $i = n$  do
4:    $c[v_i] \leftarrow \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \neq c(u) \text{ für alle } u \in N(v_i) \cap \{v_1, \dots, v_{i-1}\}\}$ 
```

- $\Delta(G) :=$ maximaler Grad in G
- Es gibt eine Reihenfolge für die der Greedy-Algorithmus $\chi(G)$ viele Farben benötigt
- Es gibt bipartite Graphen und eine Reihenfolge für die der Greedy-Algorithmus $|V|/2$ viele Farben benötigt

Heuristik

- Wir suchen Knoten mit kleinstem Grad und entfernen ihn
- Wiederholen bis wir alle Knoten haben
- Falls $G=(V,E)$ erfüllt, dass es in jedem Subgraphen einen Knoten mit $\text{Grad} \leq k$ gibt, liefert Heuristik Reihenfolge die höchstens $k+1$ Farben braucht
- Für Bäume finden wir mit Heuristik immer eine 2-Färbung

Satz von Brooks

- Ist $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph, der weder vollständig noch ein ungerader Kreis ist, so gilt $\chi(G) \leq \Delta(G)$ und es gibt einen Algorithmus, der die Knoten in Zeit $O(|E|)$ mit $\Delta(G)$ Farben färbt.
- G hat Knoten v mit $\deg(v) < \Delta(G) \rightarrow$ DFS von v Knoten-Reihenfolge rückwärts
- G ist k -regulär und hat Artikulationsknoten $a \rightarrow a$ finden und von dort Case 1 ev. tauschen von Farben sodass Gleicher Knoten in versch. ZHKs gleiche Farbe bekommt
- G ist k -regulär und hat keinen Artikulationsknoten $\rightarrow$ nächste Slide

Satz von Brooks

Beweis

- G ist k -regulär und hat keinen Artikulationsknoten
 - v hat 2 Nachbarn, welche nicht miteinander verbunden sind
- $G \setminus \{v_1, v_2\}$ ist zusammenhängend $\rightarrow$ DFS von v . Reihenfolge: v_1, v_2 dann Knoten
Reihenfolge von DFS rückwärts
- $G \setminus \{v_1, v_2\}$ nicht zusammenhängend $\rightarrow$ nächste Slide

Satz von Brooks

Beweis

- $G \setminus \{v_1, v_2\}$ nicht zusammenhängend
 - v_1 oder v_2 hat Grad höchstens $\Delta(G)-2$ (In allen Komponenten) $\rightarrow$ Kante $\{v_1, v_2\}$ hinzufügen und Färben wie in Case 1 ev. tauschen wie in Case 2
- v_1 und v_2 haben beide Grad $\Delta(G) - 1$ (in einer Komponente) $\rightarrow$ wie in Case 1 Färben ev. tauschen wie Case 2

Planare Graphen

- Jede Landkarte lässt sich mit vier Farben färben (Planare Graphen)
- Ein **planarer Graph** ist ein Graph ohne Kanten Überkreuzungen
- Planare Graphen haben immer mindestens 1 Knoten mit $\text{Grad} \leq 5$
- Heuristik findet Färbung mit ≤ 6 Farben

3-Färbbarkeit

- Wähle Knoten mit Grad $> \sqrt{n}$
- dies Kann man maximal $\sqrt{n}$ mal machen
- Danach bleiben maximal $\sqrt{n}$ Knoten übrig
- Wir brauchen $4\sqrt{n}$ Farben

Färbungen

Spezialfälle und Zusatzinformation

- Gerade Kreise sind 2-färbbar, ungerade Kreise sind 3-färbbar
- Ein Graph ist genau dann bipartit wenn er keinen Kreis ungerader Länge als Teilgraphen enthält
- Einen Blockgraphen G , in dem man jeden Block mit k Farben färben kann, kann man mit k Farben färben. (Farbklassen vertauschen)
- Planare Graphen lassen sich mit 4 Farben färben - Greedy mit Heuristik findet Färbung mit 6
- Jeden 3-färbbaren Graphen kann man in Zeit $O(|E|)$ mit $O(\sqrt{|V|})$ Farben färben

Exercise S4.1 – *Perfect Bipartite Matching*

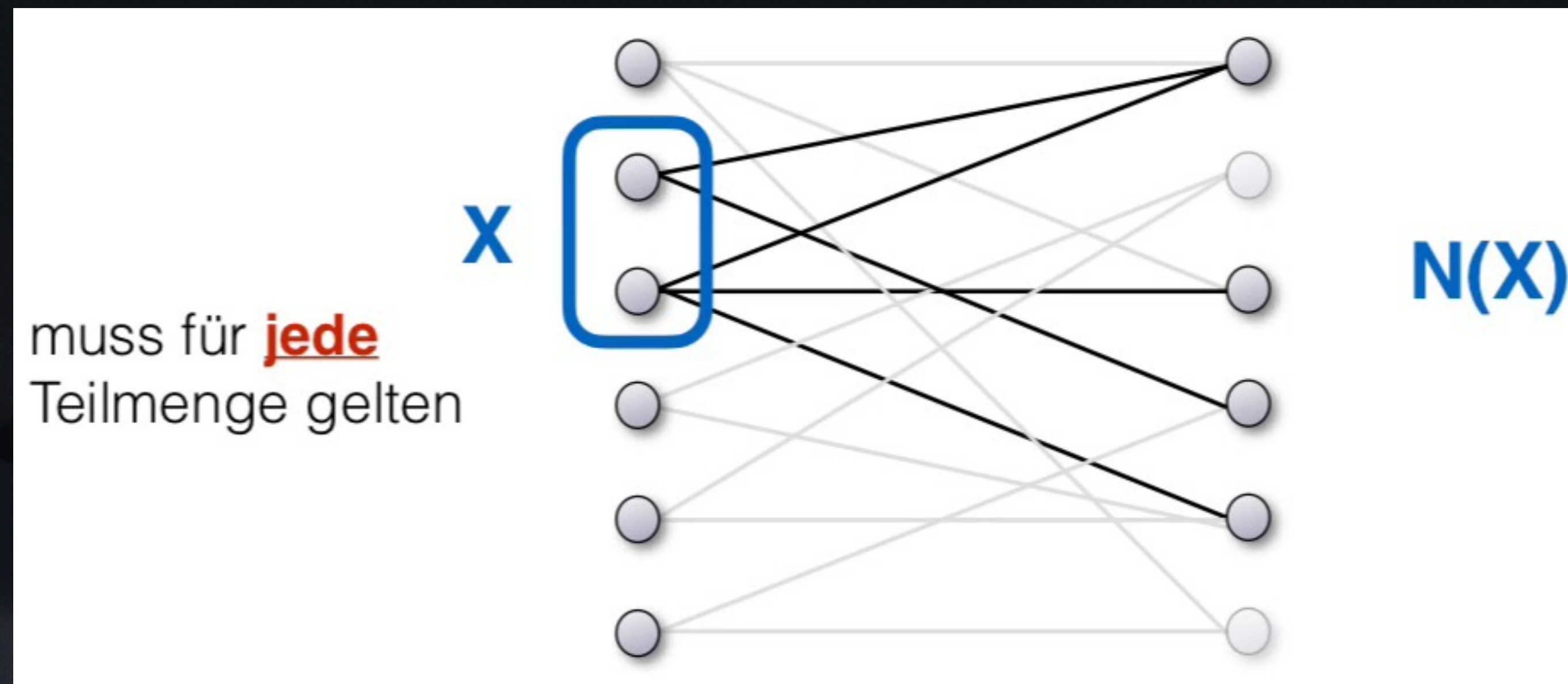
Let $G = (A \dot{\cup} B, E)$ be a bipartite k -regular graph (i.e. every vertex has degree exactly k).

- (a) Show that G contains a perfect matching.
- (b) Show that G contains k pairwise disjoint perfect matchings.

Hint: use (a)

Satz von Hall (Heiratssatz)

- Ein bipartiter Graph $G=(A \cup B, E)$ enthält ein Matching M der Kardinalität $|M|=|A|$ gdw.
 $\forall X \subseteq A : |X| \leq |N(X)|$



Satz von Hall

Beweis

- $\Rightarrow$ ✓
- $\Leftarrow$ Induktion über $\alpha = |A|$
 - BC: $\alpha = 1$: ✓
 - Wir müssen zeigen: Satz gilt für alle bipartiten Graphen mit $|A| = \alpha$
 - Wir dürfen verwenden: Satz gilt für alle bipartiten Graphen mit $|A| \leq \alpha - 1$

Satz von Hall

Beweis

- Induktionsschritt: $\alpha-1 \Rightarrow \alpha$
 - Fall 1: $\forall \emptyset \neq X \subseteq A : |X| < |N(X)|$
 - Wähle beliebige Kante $\{x,y\}$ und lösche x, y und alle inzidenten Kanten.
 - Zeige, dass der verbleibende Graph die Bedingung $\forall X \subseteq A : |X| \leq |N(X)|$ erfüllt

Satz von Hall

Beweis

- Fall 2: $\exists \emptyset \neq X_0 \subseteq A : |X_0| = |N(X_0)|$
 - Betrachte die beiden durch $X_0 \cup N(X_0)$ bzw. $A \setminus X_0 \cup B \setminus N(X_0)$ induzierten Graphen
 - Zeige, dass beide Graphen die Bedingung $\forall X \subseteq A : |X| \leq |N(X)|$ erfüllen

Augmentierende Pfade

Hopcroft und Karp Algorithmus

- Laufzeit: 1 Durchlauf $O(|V|+|E|)$
- Laufzeit: alle Pfade $O(\sqrt{|V|}*|E|)$

```
MAXIMAL_MATCHING ( $G = (A \oplus B, E)$ ) (Hopcroft und Karp)  
1:  $M := \{e\}$  für irgendeine Kante  $e \in E$ .  
2: while es gibt noch augmentierende Pfade do  
3:    $k :=$  Länge eines kürzesten augmentierenden Pfades  
4:   Finde eine inklusionsmaximale Menge  $S$  von paarweise disjunkten  
   augmentierenden Pfaden der Länge  $k$ .  
5:   for all  $P$  aus  $S$  do  
6:      $M := M \oplus P$ . // augmentiere entlang der Pfade aus  $S$   
7: return  $M$ 
```

- Blossom-Algorithmus für allgemeine Graphen in $O(|V|^3|E|)$