

Algorithmen und Wahrscheinlichkeit

Übungsstunde 2

Programm

- Minitest
- Theory Recap
- Kahoot
- In-Class Exercises

Minitest

- Passwort: vertex
- Zeit Limit: 10 Minuten
- Anzahl Fragen: 10
- 0.2 Punkte pro richtig beantwortete Frage

Join WhatsApp Group



Minitest

Minitest Fragen

Teil 1

- Es existiert ein Graph mit 51 Knoten, in dem jeder Knoten Grad 17 hat
- Jede Brücke in einem Graphen ist zu mindestens einem Artikulationsknoten inzident
- Es existiert ein 4-zusammenhängender Graph, in dem jeder Knoten Grad genau 4 hat

Minitest Fragen

Teil 2

- Ein Hamiltonkreis in einem Graphen besucht jeden Knoten genau einmal
- Für zwei Knoten a, b eines Graphen sei $a \sim b$ genau dann, wenn $a = b$ gilt oder wenn a und b auf einem gemeinsamen Kreis liegen. Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation
- Jeder zusammenhängende Graph mit allen Knoten geraden Grades hat einen Eulerkreis

Minitest Fragen

Teil 3

- Jeder 2-zusammenhängende Graph hat einen Hamiltonkreis
- Wenn $G = (V, E)$ ein 3-zusammenhängender Graph ist und $v \in V$, dann ist $G[V \setminus \{v\}]$ 2-zusammenhängend

Minitest Fragen

Teil 4

- Für jedes $t \geq 3$ ist ein vollständiger Graph K_t mit t Knoten 2-zusammenhängend
- Es gibt einen Hamiltonkreis für einen Schachspringer auf einem 7x7 Schachbrett

Theory Recap

Hamiltonkreis

- Jeder Knoten genau einmal - gleicher Start- und Endknoten
- Im Allgemeinen NP-vollständig

Hamiltonkreise

Spezialfälle für einfachere Bestimmung

- $n \times m$ Grid **enthält** Hamiltonkreis gdw. **$n*m$ gerade** (für $n, m \geq 2$)
- Ikosaeder **enthält** Hamiltonkreis
- d -dimensionale Hyperwürfel **enthält** Hamiltonkreis
- Jeder Graph $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 3$ und Minimalgrad $\delta(G) \geq |V|/2$ **enthält** Hamiltonkreis (Dirac)
- Petersengraph **enthält keinen** Hamiltonkreis

Satz von Dirac

Beweis

- Jeder Graph $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 3$ und Minimalgrad $\delta(G) \geq |V|/2$ **enthält** Hamiltonkreis (Dirac)
 - Zeige Graph zusammenhängend via existiert Pfad zwischen jedem Knotenpaar
 - Es gibt einen Pfad mit allen Knoten von $v_1 - v_n$
 - Wähle $|V|/2$ Knoten mit Verbindung zu v_1
 - Nenne einen dieser Knoten v_i , v_n soll keine Verbindung zu irgendeinem v_{i-1} haben
 - Dann hat v_n noch $|V| - |V|/2 - 1$ Knoten zur Auswahl für eine Verbindung (nicht zu sich selbst) -> Widerspruch

Siebformel

Satz 1.35. (*Siebformel, Prinzip der Inklusion/Exklusion*) Für endliche Mengen $A_1, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) gilt:

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= \sum_{l=1}^n (-1)^{l+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_l}| \\ &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \\ &\quad - \dots + (-1)^{n+1} \cdot |A_1 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$

- Für $n=2$: $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$
- Für $n=3$: $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$



Hamiltonkreise

mit DP

- $P_{S,x} := \begin{cases} 1, & \text{es gibt einen 1-x-Pfad, der genau die Knoten aus } S \text{ enthält} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
- Initialisierung: $\forall x \in \{2, \dots, n\} : \text{für } S = \{1, x\} \text{ setze } P_{S,x} = 1 \text{ gdw } \{1, x\} \in E$
- for all $s = 3$ to n
 - for all $S \subseteq [n]$ mit $1 \in S$ und $|S| = s$
 - for all $x \in S$ mit $x \neq 1$
$$P_{S,x} = \max\{P_{S \setminus \{x\},y} : y \in N(x) \cap S, y \neq 1\}$$
- Ausgabe: G enthält Hamiltonkreis gdw. $\exists x \in N(1)$ mit $P_{[n],x} = 1$
- Laufzeit: $\approx n^2 2^n$ Speicherplatz: $\approx n 2^n$

NP-Vollständigkeit

- P = effizient entscheidbare Probleme
- NP = (einseitig) effizient verifizierbare Probleme
- Problem X ist NP-vollständig, falls gilt: $X \in P \Rightarrow P = NP$

TSP

- Gegeben: vollständiger Graph auf n Knoten, Distanzen zwischen je zwei Knoten:

$$l : \binom{[n]}{2} \rightarrow \mathbb{R}$$

- Gesucht: kürzeste Rundreise: $\min_{H: \text{Hamiltonkreis}} \sum_{e \in E(H)} l(e)$
- NP-vollständig, da wenn TSP polynomieller Zeit lösbar, dann wäre auch das Hamiltonkreis Problem lösbar in polynomieller Zeit.

Metrisches TSP

2-Approximation

- Funktion l erfüllt Dreiecksungleichung: $l(x, z) \leq l(x, y) + l(y, z) \quad \forall x, y, z \in [n]$
 - Bestimme MST T es gilt: $l(T) \leq \text{opt}(K_n, l)$
 - verdopple alle Kanten von T : $2l(T) \leq 2\text{opt}(K_n, l)$
 - bestimme Eulertour W : $l(W) = 2l(T) \leq 2\text{opt}(K_n, l)$
 - durchlaufe W mit Abkürzungen, so dass jeder Knoten nur einmal besucht wird => Hamiltonkreis C : $l(C) \leq l(W) = 2l(T) \leq 2\text{opt}(K_n, l)$

Kahoot

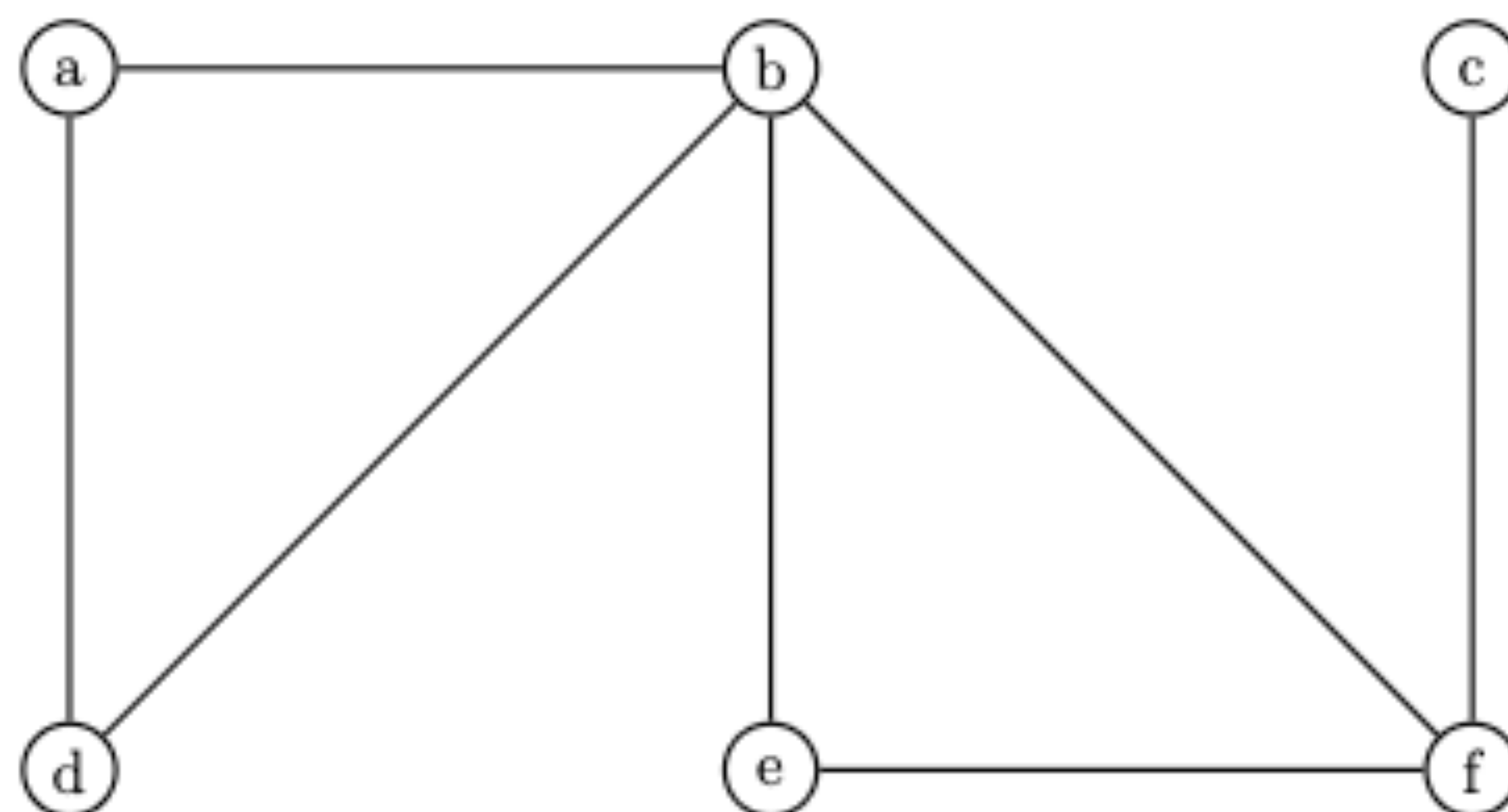
- <https://play.kahoot.it/v2/?quizId=229cd7aa-b0a1-411f-ad2e-0f5ce3a9b831&hostId=c89c5518-7931-4c0d-a975-6b14865c8648>

In-Class Exercises

Exercise S2.1 – *Efficient Search for Bridges and Cut-Vertices*

In the lecture we have seen how to find bridges (Brücken) and cut-vertices (Artikulationsknoten) in a graph. The algorithm uses a modified DFS and computes values `dfs[v]` and `low[v]` for every vertex v .

Consider the following graph G .



- (a) Perform the modified DFS starting at vertex a . Use the corresponding `dfs`- and `low`-values to determine the cut-vertices and bridges of G .
- (b) Try the same analysis, but starting in b . Do the `dfs`- and `low`-values change? Do the cut-vertices and bridges change?
- (c) Compute the block graph of G .

Exercise S2.2 – *Connectivity*

Let $G = (V, E)$ be a two connected graph.

- (a) Let (u, v, w) be a path in G of length 2. Show that we can extend this path to a cycle, that is, show that G contains a cycle where u, v, w appear as incident vertices.
- (b) Let $e \in E$ be an edge, and $u, v \in V$ be two vertices. Show that there is a path in G from u to v passing through e .
(*Hint: you may use without proof that in a 2-connected graph, every two edges e, f lie on a common cycle.*)

Aufgaben

- Wie viele Kanten gibt es in K_n ?
- Zeige, dass jeder Graph $G = (V, E)$ mit $|V| = n \geq 3$ und $|E| \geq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$ zusammenhängend ist
- Finde einen Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| = n \geq 3$ und $|E| \geq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$ der keinen Hamiltonkreis enthält.
- Beweise, dass jeder Graph $G = (V, E)$ mit der Eigenschaft, dass $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ für $u, v \in V$ nicht adjazent, einen Hamiltonkreis enthält
- Beweise, dass jeder Graph $G = (V, E)$ mit $|V| = n \geq 3$ und $|E| \geq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$, einen Hamiltonkreis enthält.