

Algorithmen und Wahrscheinlichkeit

Übungsstunde 1

Programm

- Organisatorisches
- Inhalt
- Motivation
- Theory Recap
- Aufgabenblatt

Organisatorisches

- **Codeexpert** jede Woche verfügbar ab Donnerstag 18:00 -> zu lösen bis nächsten Donnerstag 10:00
- **Theorie Aufgaben** alle zwei Wochen verfügbar ab Donnerstag -> zu lösen bis nächsten Donnerstag 10:00; Nächste Woche 1.
- **Peer Grading Aufgaben** alle zwei Wochen verfügbar ab Donnerstag -> zu lösen bis nächsten Donnerstag 10:00 -> Peer graden bis Sonntag 23:59
- **Minitests** alle zwei Wochen in der Übungsstunde mit Passwort (immer wenn Theorie Aufgaben); Nächste Woche 1.

Organisatorisches

- Theorieaufgaben und Peer Grading sowie Korrekturen auf Moodle
- Fragen an: mhonegger@ethz.ch



Inhalt

Graphen

- Zusammenhang
- Kreise - TSP
- Matchings
- Färbungen

Inhalt

Wahrscheinlichkeit

- Grundbegriffe
- Verteilungen
- Abschätzungen
- Randomisierte Algorithmen

Inhalt

Algorithmen - Highlights

- Flüsse
- Minimale Schnitte
- Kleinstes umschliessender Kreis
- Konvexe Hülle

Motivation

- Leichter Bonus
 - 2P. CodeExpert
 - 2P. Theorie Aufgaben
 - 2P. Minitest
 - 2P. Peer Grading

Prüfung

(Voraussichtlich, keine Garantie!)

- 50% Multiple Choice
- 25% Theorieaufgaben / Beweise
- 25% CodeExpert

Motivation

- 3 Teile -> Neueinstieg mehrfach möglich
- Coole und einfache Algorithmen
- Gut geschriebenes Skript

Theory Recap

k-Zusammenhang

- Ein Graph ist k-zusammenhängend, wenn gilt:
 - $|V| \geq k + 1$ und $\forall X \subseteq V$ ist $G[V \setminus X]$ zusammenhängend
 - Man muss mindestens k Knoten löschen um den Zusammenhang zu zerstören
- Ein Graph ist k-Kanten-zusammenhängend, wenn gilt:
 - $\forall X \subseteq E$ mit $|X| < k$ ist $(V, E \setminus X)$ zusammenhängend

k-Zusammenhang Cont'd

- Menger:

G ist k-zusammenhängend gdw. $\forall u, v \in V, u \neq v$ gibt es k intern-knotendisjunkte u-v-Pfade

G ist k-Kanten-zusammenhängend gdw. $\forall u, v \in V, u \neq v$ gibt es k kantendisjunkte u-v-Pfade

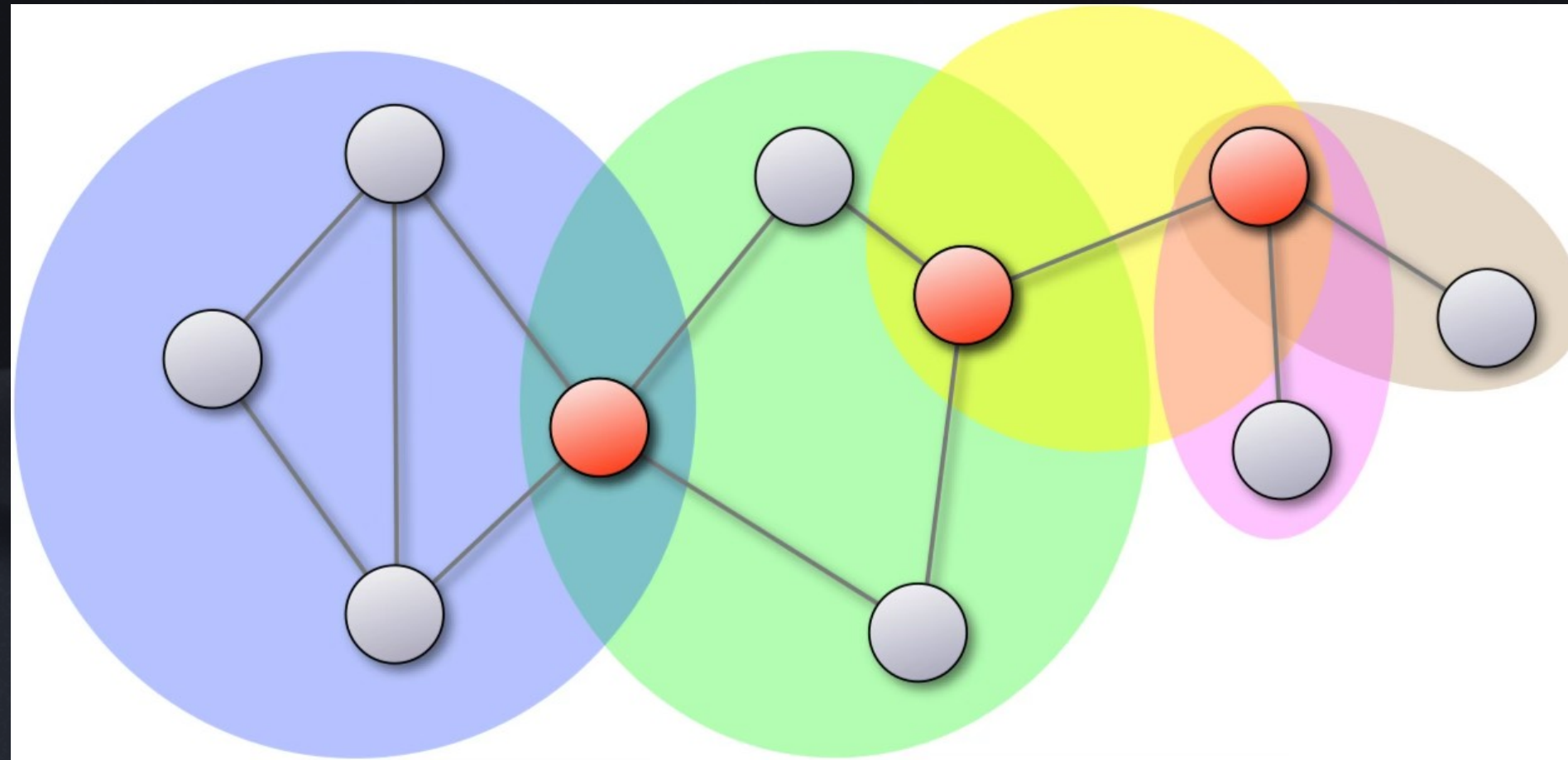
- $(\text{Knoten-})\text{Zusammenhang} \leq \text{Kanten-Zusammenhang} \leq \text{Minimaler Grad}$

Artikulationsknoten & Brücken

- Ein Knoten wird **Artikulationsknoten** genannt, wenn der Graph durch sein entfernen nicht mehr zusammenhängend ist.
- Eine Kante wird **Brücke** genannt, wenn der Graph durch ihr entfernen nicht mehr zusammenhängend ist.
- Brücke von $\{x,y\}$ $\rightarrow \deg(x) = 1$ oder x ist Artikulationsknoten (Umkehrung gilt nicht)

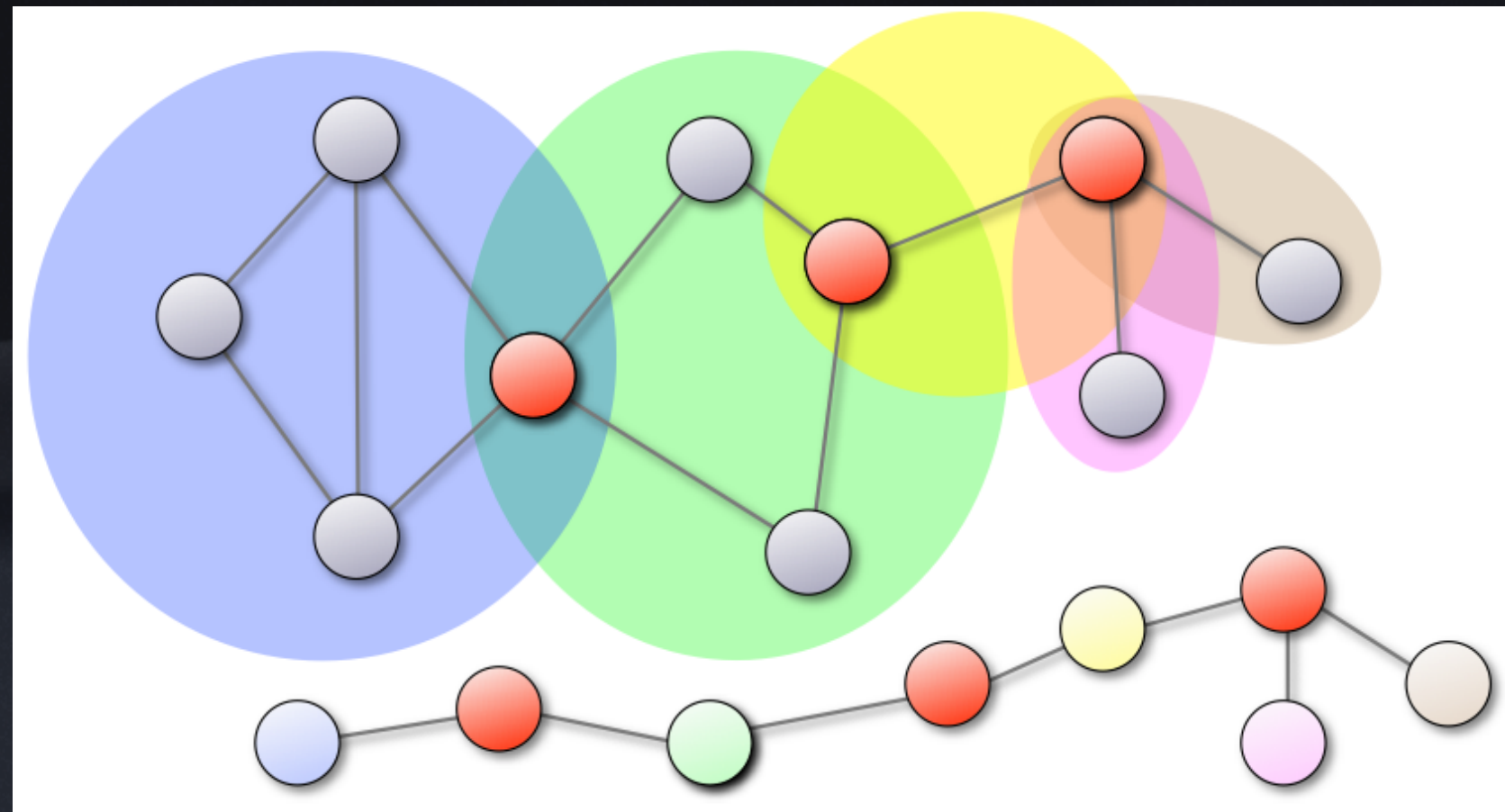
Blöcke

- $e \sim f \Leftrightarrow \begin{cases} e = f, & \text{oder} \\ \exists \text{ Kreis durch } e \text{ und } f \end{cases}$
- Zwei Blöcke schneiden sich - wenn überhaupt - immer in einem Artikulationsknoten



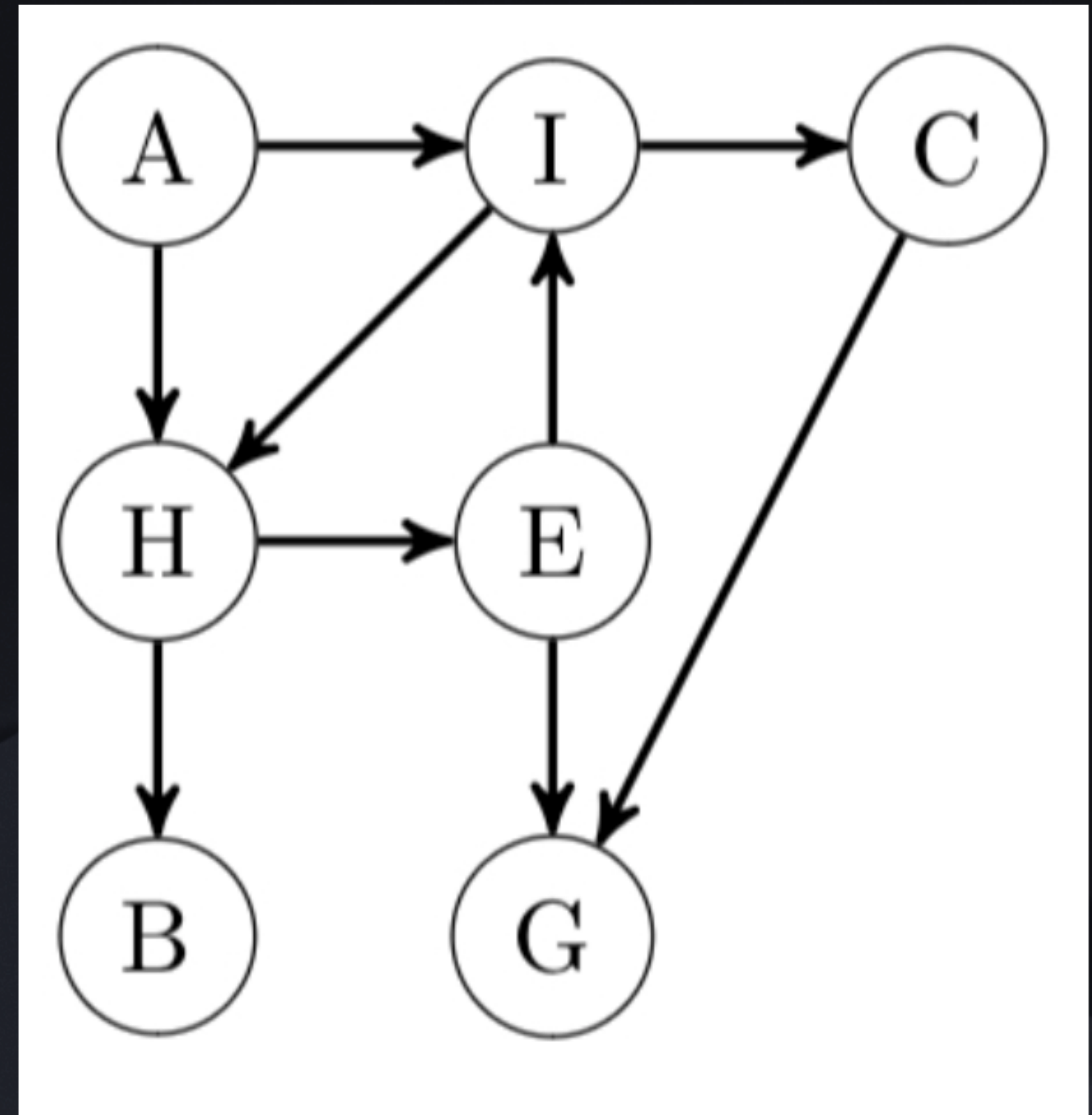
Blockgraph

- Bipartiter Graph $T = (A \uplus B, E_T)$
 - $A = \{\text{Artikulationsknoten von } G\}$, $B = \{\text{Blöcke von } G\}$
 - $\forall a \in A, b \in B : a, b \in E_T \Leftrightarrow a \text{ inzident zu Kante in } b$



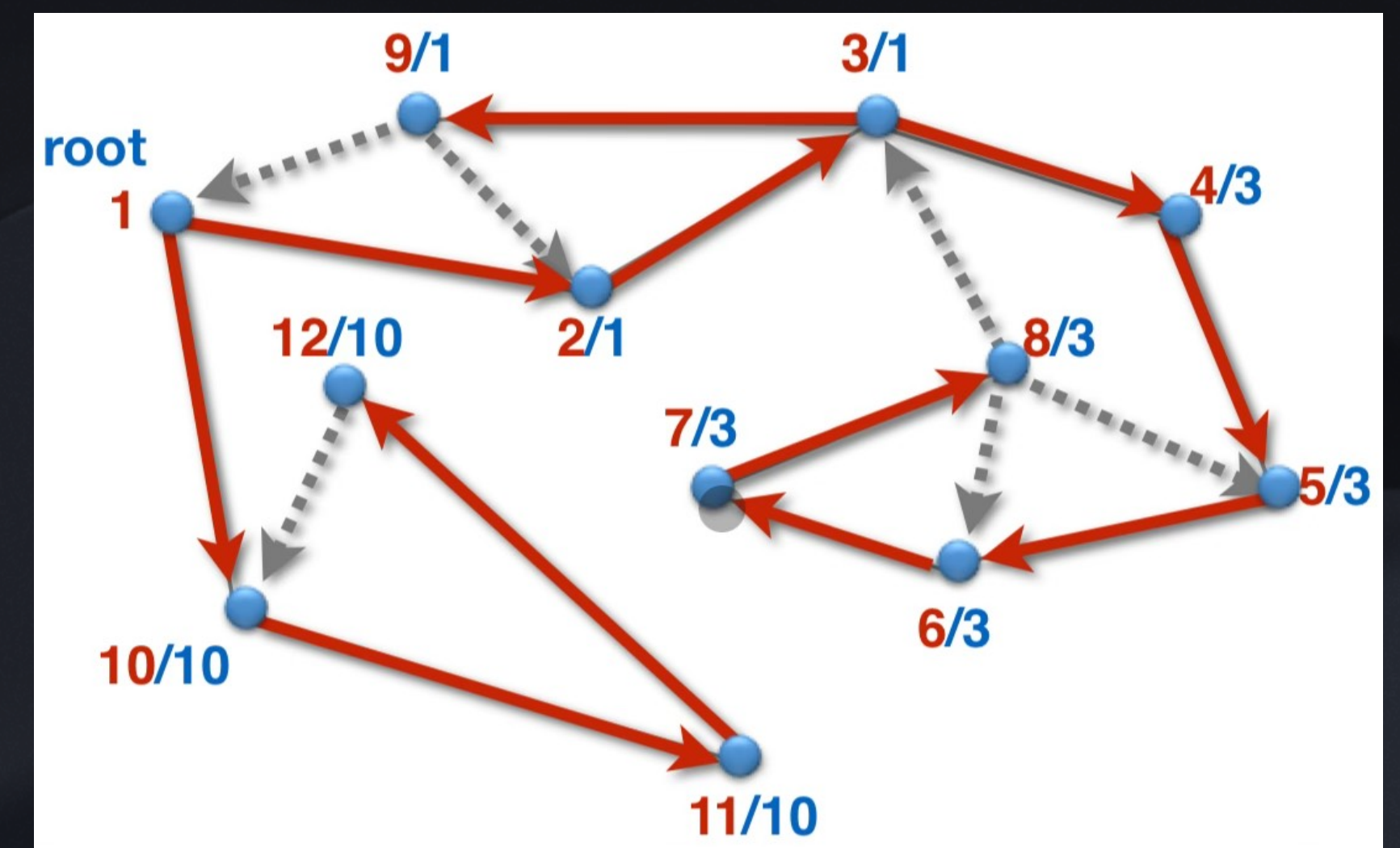
Recap DFS/BFS

- BFS mit FIFO Queue - Nützlich für kürzeste Pfade
- DFS mit LIFO Stack - Nützlich für Artikulationsknoten/
Brücken



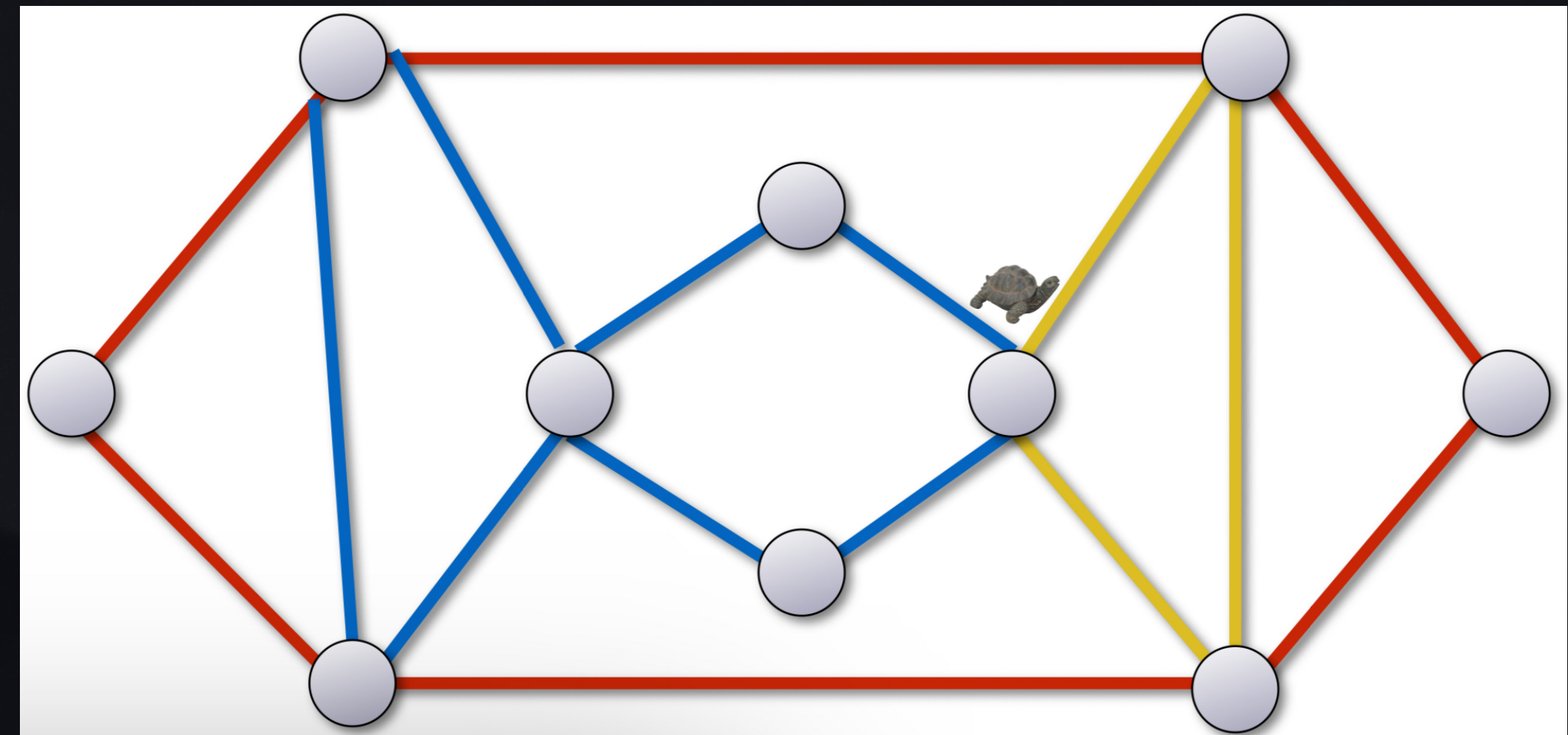
DFS mit Low-Werten

- $\text{low}[v]$:= kleinste dfs-Nummer, die man von v aus durch einen gerichteten Pfad aus Baumkanten und maximal einer Restkante erreichen kann
- v ist Artikulationsknoten gdw. $v \neq \text{root}$ und v hat ein Kind w im DFS-Baum mit $\text{low}[w] \geq \text{dfs}[v]$ oder $v = \text{root}$ und v hat mindestens zwei Kinder im DFS-Baum
- Eine Baumkante (v,w) ist eine Brücke gdw. $\text{low}[w] > \text{dfs}[v]$
- Läuft in $O(m)$



Eulertouren

- Jede Kante genau ein Mal - gleicher Start- und Endknoten
- Existiert gdw. Grad aller Knoten gerade ist
- Kann in $O(|E|)$ gefunden werden



- Wenn alle Knotengrade bis auf 2 gerade sind, enthält der Graph einen Eulerweg

Hamiltonkreis

- Jeder Knoten genau einmal - gleicher Start- und Endknoten
- Im Allgemeinen NP-vollständig

Hamiltonkreise

Spezialfälle für einfachere Bestimmung

- $n \times m$ Grid **enthält** Hamiltonkreis gdw. **$n*m$ gerade** (für $n, m \geq 2$)
- Ikosaeder **enthält** Hamiltonkreis
- d -dimensionale Hyperwürfel **enthält** Hamiltonkreis
- Jeder Graph $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 3$ und Minimalgrad $\delta(G) \geq |V|/2$ **enthält** Hamiltonkreis (Dirac)
- Petersengraph **enthält keinen** Hamiltonkreis

Prüfungsaufgabe

(a) Sei G ein Graph, der einen Hamiltonkreis hat. Dann ist G 2-zusammenhängend.

WAHR ☐ FALSCH ☐

Begründung/Gegenbeispiel:

(2 Punkte)

Aufgaben