

AuW Week 4

Niklas Weißbecher

March 2026

1 Quiz

1.1 Q1: Jeder k -reguläre bipartite Graph $G = (A \cup B, E)$ für $k \geq 1$ hat ein Matching der Größe $|A|$.

Wahr. Wir benutzen den Satz von Hall und zeigen dass für alle $X \subseteq A$ gilt $|X| \leq |N(X)|$. Da jedes Edge mit einem Endpunkt in $X \subseteq A$ den anderen in $N(X) \subseteq B$ hat gilt also

$$\sum_{v \in X} \deg(v) \leq \sum_{v \in N(X)} \deg(v)$$

also

$$|X| \cdot k \leq |N(X)| \cdot k \Rightarrow |X| \leq |N(X)|$$

da $k > 0$. Damit gilt Halls Bedingung und die Aussage ist bewiesen.

1.2 Q2: . Das (kardinalitäts-)maximale Matching in einem bipartiten Graphen kann in der Zeit $O(\sqrt{|V|} \cdot |E|)$ gefunden werden

Wahr $\Rightarrow$ Hopcroft-Karp Algorithmus

1.3 Q3: Jeder Graph ohne Dreieck hat eine chromatische Zahl von höchstens 100

Falsch. Nach Satz 1.6.6 kann man für alle $k > 0$ einen dreiecksfreien Graphen mit $\chi(G_k) \geq k$ konstruieren:

Sei $G_k = (V_k, E_k)$ ein dreiecksfreier Graph für dessen Färbung mindestens k Farben benötigt werden. Wir konstruieren den neuen Graphen wie folgt: Für alle $v_1 \dots v_n \in V_k$ fügen wir einen neuen Knoten $w_1 \dots w_n$ hinzu, so dass w_i mit allen Nachbarn von v_i verbunden ist. Zusätzlich fügen wir noch einen Knoten z hinzu.

Da keine Knoten w_i, w_j miteinander verbunden sind gibt es kein Dreieck dass

zwei oder drei der Knoten $w_1 \dots w_n$ enthält. Offensichtlich ist z nur mit Knoten aus $w_1 \dots w_n$ verbunden also nicht Teil eines Dreiecks.

Da G_{k-1} dreiecksfrei ist gibt es kein Dreieck mit 0 Knoten aus $w_1 \dots w_n$ (da diese alle aus $v_1 \dots v_n$ sein müssten).

Es bleibt zu zeigen, dass es kein Dreieck mit genau einem Knoten aus $w_1 \dots w_n$ und zwei aus $v_1 \dots v_n$ gibt. Wir nehmen an, es gebe so ein Dreieck bestehend aus w_i, v_a, v_b . Dann können wir w_i durch v_i ersetzen und haben ebenfalls ein Dreieck (da nach unserer Konstruktion jeder Nachbar von w_i ein Nachbar von v_i ist - also insbesondere v_a, v_b). Das widerspricht aber der Annahme dass G_k dreiecksfrei ist.

Da $w_1 \dots w_n$ mit allen Nachbarn von $v_1 \dots v_n$ verbunden sind, benötigen wir k Farben um $w_1 \dots w_n$ zu färben (da wir ansonsten einfach $v_1 \dots v_n$ in weniger als k Farben färben könnten). Da außerdem z mit jedem aus $w_1 \dots w_n$ benachbart ist muss es in einer eigenen Farbe gefärbt sein also benötigen wir $k+1$ Farben um G_{k+1} zu färben.

1.4 Q4: Wenn G ein bipartiter Graph ist und M in G ein Matching aufweist, das nicht kardinalitätsmaximal ist, dann gibt es in G einen augmentierenden Pfad bezüglich M

Wahr. Wir betrachten ein kardinalitätsmaximales Matching M' und schauen uns $M \oplus M'$ an, was Kreise gerader Länge und Pfade enthält. Da $|M'| > |M|$ ist, muss einer dieser Pfade mehr Kanten aus M' als aus M enthalten. Da M' und M Matchings sind muss dieser Pfad immer abwechselnd Kanten aus M' und M besuchen und ist deswegen der gesuchte augmentierende Pfad.

1.5 Q5: Wenn G ein zusammenhängender Graph mit einem maximalen Grad von 100 ist, dann hat G eine korrekte Einfärbung in 100 Farben, es sei denn, G ist ein vollständiger Graph

Wahr. Falls G ein Kreis ungerader Länge ist gilt für den maximalen Grad $\Delta(G) = 2$ und nach Satz 1.6 lässt sich G also in 3 Farben färben. Falls G kein Kreis ungerader Länge ist und nicht der vollständige Graph ist so ist G nach Satz 1.64 in $\Delta(G) = 100$ Farben einfärbbar.

1.6 Q6: Für einen vollständigen Graphen G mit gerader Anzahl von Knoten und positiven Gewichten $l(x, y)$, der die Dreiecksungleichung erfüllt, sei M die minimale Kosten-perfekte Paarung und C die minimale Kosten-Reise des Handlungsreisenden. Dann ist $l(M) \leq l(C)/2$.

Wahr. Offensichtlich ist C ein Kreis gerader Länge (nach Definition des TSP). Seien $e_1, \dots, e_n$ die besuchten Kanten in C . Wir zerlegen C in zwei perfekte Matchings M_1, M_2 so dass M_1 alle ungerade nummerierten Kanten und M_2 alle gerade nummerierten Kanten enthält. Es gilt

$$l(C) = l(M_1) + l(M_2) \geq l(M) + l(M) = 2l(M) \Rightarrow l(C)/2 \geq l(M)$$

1.7 Q7: Ist G ein Graph mit maximalem Grad (G), so findet ein Greedy-Algorithmus stets eine zulässige Färbung mit höchstens $\Delta(G) + 1$ Farben

Wahr. Satz 1.6.0

1.8 Q8: Jeder Kreis ist 2-färbbar

Falsch. Wir betrachten K_3 also einen Kreis mit 3 Knoten - dieser ist nicht bipartit da er einen Kreis ungerader Länge enthält (Satz 1.58).

1.9 Q9: Es gibt einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit, der eine 1,5-Approximation für das metrische Problem des Handlungsreisenden findet

Wahr. Satz 1.51.

1.10 Q10: Es gibt einen polynomiellen Algorithmus, der für jeden planaren Graphen eine geeignete Einfärbung mit 6 Farben findet

Wir benutzen Satz 1.6.5 und zeigen dass jeder induzierte Subgraph von G einen Knoten mit Grad höchstens 5 enthält. Damit wäre der Graph 6 färbbar. Aus der Vorlesung wissen wir, dass jeder planare Graph einen Knoten mit Grad maximal 5 enthält (1) und da jeder Subgraph eines planaren Graphen auch planar ist, ist die Aussage bewiesen.

(1): Für planare Graphen gilt (folgt aus der Euler Formel (2)): $m \leq 3n - 6$. Wir nehmen jetzt an um einen Widerspruch zu erzeugen, dass jeder Knoten Grad

mindestens 6 hat. Dann ist

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq 6n \Rightarrow m \geq 3n$$

was im Widerspruch zu $m \leq 3n - 6$ steht.

(2): In einem planaren Graphen ist jede Fläche von mindestens 3 Kanten umrandet. Daher gilt, da jede Kante zwei Flächen trennt: $2e \geq 3f$. Einsetzen in die Euler Formel $v - e + f = 2$ liefert die Aussage.