

AuW Quiz 1 Solutions

Niklas Weißbecher

February 2026

1 Quiz

1.1 Es existiert ein Graph mit 51 Knoten, in dem jeder Knoten Grad 17 hat

Nach Handschlaglemma gilt

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

also gilt in unserem Fall

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V} 17 = 51 \cdot 17 = 2|E|$$

Offensichtlich ist $51 \cdot 17$ ungerade und $2|E|$ gerade - ein Widerspruch.

1.2 Jede Brücke in einem Graph ist zu mindestens einem Artikulationspunkt inzident

Ein triviales Gegenbeispiel ist $G(V, E)$ mit $V = \{u, v\}$, $E = \{\{u, v\}\}$. Entfernt man die Kante $\{u, v\}$, dann ist G nicht mehr connected, also ist $\{u, v\}$ eine Brücke. Offensichtlich ist $V - v = \{u\}$ und $G[\{u\}]$ ist trivialerweise verbunden, da er nur aus einem Knoten besteht.

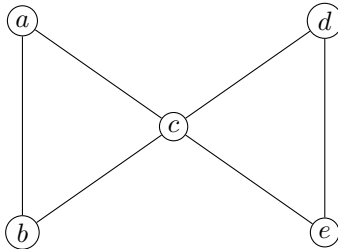
1.3 Es existiert ein 4-zusammenhängender Graph, in dem jeder Knoten Grad genau 4 hat

Wahr, K_5 - also der vollständige Graph mit 5 Knoten ist so ein Beispiel.

1.4 Ein Hamiltonkreis in einem Graphen besucht jeden Knoten genau einmal

Wahr per Definition

- 1.5** Für zwei Knoten a, b eines Graphen sei $a \sim b$ genau dann, wenn $a = b$ gilt oder wenn a und b auf einem gemeinsamen Kreis liegen. $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation



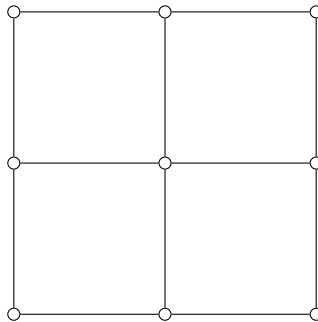
Hier ist $a \sim c$ und $c \sim d$ aber nicht $a \sim d$ weil jeder Kreis zweimal durch c gehen müsste was per definition eines Kreises nicht möglich ist

- 1.6** Jeder zusammenhängende Graph mit allen Knoten geraden Grades hat einen Eulerkreis

Wahr - Theorem (Beweis im Skript)

- 1.7** Jeder 2-zusammenhängende Graph hat einen Hamiltonkreis

Falsch: Wir betrachten einen 3x3 Gittergraphen:



- 1.8** Wenn $G = (V, E)$ ein 3-zusammenhängender Graph ist und $v \in V$, dann ist $G[V \setminus \{v\}]$ 2-zusammenhängend.

Wir nehmen an $G[V \setminus \{v\}]$ wäre nicht 2 zusammenhängend, also gibt es $X \subseteq V \setminus \{v\}$ mit $|X| \leq 1$ so dass $G[(V \setminus \{v\}) \setminus X]$ nicht zusammenhängend ist. Dann ist aber auch $G[V \setminus (X \cup \{v\})]$ nicht zusammenhängend und $|X \cup \{v\}| = |X| + 1 \leq 1 + 1 = 2$

1.9 Für jedes $t \geq 3$ ist ein vollständiger Graph K_t mit t Knoten 2-zusammenhängend

Wahr - wir beobachten dass wenn wir einen Knoten aus K_t - inklusive seiner Kanten - entfernen, wir einfach K_{t-1} erhalten. Da $t \geq 3$ ist haben wir nachdem wir einen Knoten entfernen also einen vollständigen Graphen mit $t - 1$ Knoten der nach wie vor zusammenhängend ist. Außerdem gilt $t \geq 3 = 2 + 1$.

1.10 Es gibt einen Hamiltonkreis für einen Schachspringer auf einem 7x7 Schachbrett

Wir beobachten, dass ein Springer nach einem Zug immer auf einem Feld der entgegengesetzten Farbe zum Ursprungsfeld steht. Daher müsste er in einem Hamiltonkreis also immer abwechselnd schwarze und weiße Felder besuchen - was nicht möglich ist da in einem Schachbrett mit 49 Feldern immer eine Farbe die Überzahl hat.