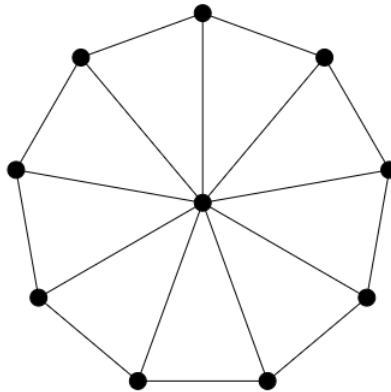


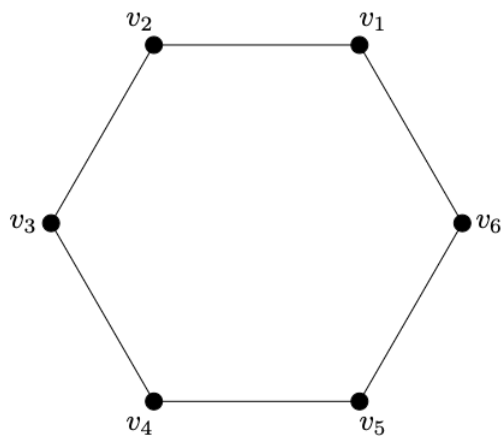
Algorithms and Probability

Execises PVW

- (a) Sei G der Rad-Graph mit 10 Knoten (also 9 auf dem äusseren Kreis, siehe Bild). Bestimmen Sie (mit Begründung) $\chi(G)$.



- (b) Zeigen oder widerlegen Sie: Der Greedy-Algorithmus färbt jeden Baum mit zwei Farben, unabhängig von der Knotenreihenfolge.
- (c) Was ist $\chi(G)$ für folgenden Graphen? Finden Sie eine Knotenreihenfolge, für welche der Greedy-Algorithmus $\chi(G)$ Farben braucht und eine Knotenreihenfolge, für welche der Greedy-Algorithmus mehr als $\chi(G)$ Farben braucht.



- (d) Zeigen Sie, dass es für jeden Graphen G eine Knotenreihenfolge gibt, so dass der Greedy-Algorithmus $\chi(G)$ Farben braucht.
- (a) Wenn es einen Knoten $v \in V$ gibt, sodass für alle $w \in V \setminus v$ gilt, dass $\deg(w) \leq k$, dann kann man G mit $k + 1$ Farben färben.

- (a) Wir würfeln mit einem roten und einem schwarzen Würfel (beide Würfel sind handelsübliche Würfel mit 6 Seiten) und definieren die folgenden Ereignisse A, B, C, D

- A = 'Der rote Würfel zeigt eine gerade Augenzahl.'
- B = 'Der schwarze Würfel zeigt eine 5.'
- C = 'Das Produkt der Augenzahlen ist eine Primzahl.'
- D = 'Die Summe der Augenzahlen ist durch 3 teilbar.'

Hierbei bedeutet die Schreibweise A = 'Aussage', dass A die Menge aller Elementarereignisse ist, für die die Aussage zutrifft.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\Pr[X]$ für alle $X \in \{A, B, C, D\}$. Berechnen Sie $\Pr[A|C]$. Sind die Ereignisse A, B (mathematisch!) unabhängig? Wie verhält es sich für die Ereignisse B, C bzw. C, D ? (Sie müssen also für insgesamt 3 Paare von Ereignissen bestimmen, ob das jeweilige Paar unabhängig ist.)

- (c) David wirft sehr gerne Münzen. Immer wenn er die Folge Zahl, Kopf, Kopf, Zahl (direkt aufeinanderfolgend) sieht, freut er sich besonders, da $ZKKZ$ seine Lieblingsfolge ist. Angenommen David wirft seine Münze 10 mal. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass seine Lieblingsfolge in den 10 Würfeln vorkommt? Genauer gesagt, bezeichnen wir mit $M_1, \dots, M_{10}$ die Ergebnisse der 10 Münzwürfe und möchten die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass es ein $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$ gibt, sodass

$$M_i = Z, M_{i+1} = K, M_{i+2} = K, M_{i+3} = Z. \quad (1)$$

Hinweis: Für $i = 1, \dots, 7$ sei E_i das Ereignis, dass (1) für i eintritt. Was ist $\Pr[E_1 \cup \dots \cup E_7]$? Verwenden Sie das Inklusions-Exklusions-Prinzip.

Sei $n \geq 2$. Betrachten Sie folgenden Zufallsprozess: Im ersten Schritt wird X uniform zufällig aus der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ gezogen. Im zweiten Schritt wird Y uniform zufällig aus der Menge $\{1, \dots, X\}$ gezogen.

- Wie viele mögliche Werte gibt es für das Paar (X, Y) ?
- Bestimmen Sie die gemeinsame Dichte von X und Y .
- Sei $y \in \{1, \dots, n\}$. Berechnen Sie $\Pr[Y = y]$.
- Bestimmen Sie für alle $x, y \in \{1, \dots, n\}$ die bedingte Wahrscheinlichkeit $\Pr[Y = y | X = x]$.
- Bestimmen Sie für alle $x, y \in \{1, \dots, n\}$ die bedingte Wahrscheinlichkeit $\Pr[X = x | Y = y]$.
- Zeigen Sie, dass X und Y nicht unabhängig sind.

Hinweis: Geben Sie eine Gleichung an, die für unabhängige Zufallsvariablen erfüllt sein müsste, die aber von X und Y nicht erfüllt wird.

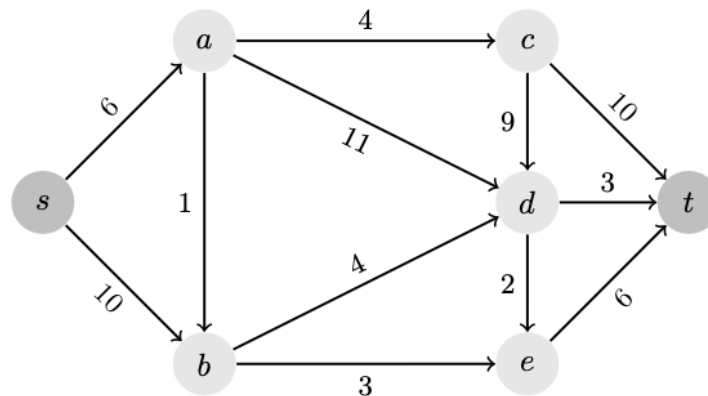
- (a) Wir würfeln mit einem roten und einem schwarzen Würfel (beide Würfel sind handelsübliche Würfel mit 6 Seiten) und definieren die folgenden Ereignisse A, B, C, D

- A = 'Der rote Würfel zeigt eine gerade Augenzahl.'
- B = 'Der schwarze Würfel zeigt eine 5.'
- C = 'Das Produkt der Augenzahlen ist eine Primzahl.'
- D = 'Die Summe der Augenzahlen ist durch 3 teilbar.'

Hierbei bedeutet die Schreibweise A = 'Aussage', dass A die Menge aller Elementarereignisse ist, für die die Aussage zutrifft.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\Pr[X]$ für alle $X \in \{A, B, C, D\}$. Berechnen Sie $\Pr[A|C]$. Sind die Ereignisse A, B (mathematisch!) unabhängig? Wie verhält es sich für die Ereignisse B, C bzw. C, D ? (Sie müssen also für insgesamt 3 Paare von Ereignissen bestimmen, ob das jeweilige Paar unabhängig ist.)

Gegeben sei das folgende Netzwerk N .



- Finden Sie einen maximalen Fluss in N .
- Finden Sie einen minimalen Schnitt in N .
- Argumentieren Sie, dass der gefundene Fluss und der gefundene Schnitt optimal sind.

Die neue Serie von Sammelkarten mit Bildern berühmter Fussballspieler ist gerade erschienen. Die Serie besteht aus n verschiedenen Sammelkarten. Sie kaufen Pakete mit je einer Sammelkarte, die unabhängig, uniform zufällig aus den n Sammelkarten ausgewählt wurde. Da Sie nicht an doppelten Bildern interessiert sind, geben Sie alle Bilder, die Sie bereits besitzen, an Ihren kleinen Bruder weiter.

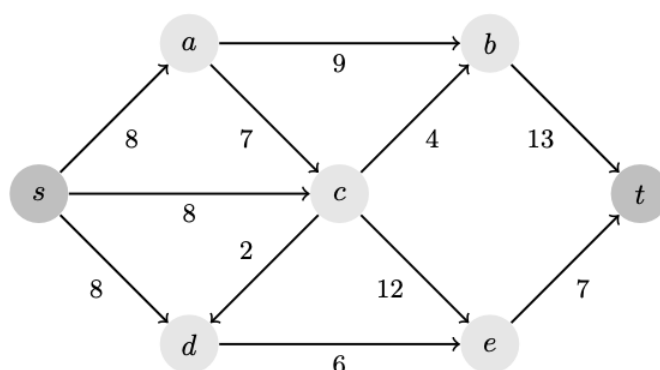
- Besonders gespannt sind Sie auf die neuen Bilder der Nati-Startelf. Wie viele Coupons müssen Sie durchschnittlich kaufen, bevor Sie alle diese 11 Bilder haben?
- Sei T die Anzahl der Coupons, die Sie gekauft haben, wenn Sie Ihrem Bruder sein erstes Bild schenken. Gegeben $t \geq 1$, berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $T = t$?
- Messaldo ist der Lieblingsspieler Ihres Bruders. Berechnen Sie die erwartete Anzahl von Bildern, die Sie kaufen müssen, bis Ihr Bruder das Bild von Messaldo erhält.
- Nehmen Sie nun an, Sie wollen sowohl Ihre eigene als auch die Sammlung Ihres Bruders vervollständigen. Berechnen Sie die asymptotisch beste obere Schranke (in $O(\cdot)$ Notation) für die erwartete Anzahl von Bildern, die Sie hierfür kaufen müssen.

Im Folgenden sei $G = (V, E)$ ein *zusammenhängender* Graph mit mindestens drei Knoten, d.h. $|V| \geq 3$.

- Beweisen Sie folgende Aussage: Wenn $\deg(v)$ für alle $v \in V$ eine gerade Zahl ist, dann ist G 2-Kanten-zusammenhängend. Gilt die umgekehrte Implikation ebenfalls? Genauer: Gilt für jeden 2-Kanten-zusammenhängenden Graph $G = (V, E)$, dass für alle $v \in V$ der Grad $\deg(v)$ eine gerade Zahl ist?
- Angenommen G hat Minimalgrad 2. Ist G notwendigerweise 2-Kanten-zusammenhängend?
- Sei G 2-zusammenhängend, und seien $u, v \in V$ mit $u \neq v$ und $e \in E$. Beweisen Sie, dass es einen Pfad in G gibt, mit u und v als Endknoten und der e enthält.

Hinweis: Für (c) kann es hilfreich sein den Graphen G zu modifizieren indem man zwei Knoten hinzufügt und dann Ideen aus der Vorlesung verwendet.

Die folgende Abbildung zeigt ein Netzwerk mit Quelle s und Senke t , wobei die Zahlen die Kapazitäten der Kanten angeben.



Auf einigen Netzwerkkanten ist eine nichtnegative Funktion f gegeben durch

(x, y)	(s, a)	(s, c)	(s, d)	(a, c)	(d, e)	(b, t)
$f(x, y)$	8	8	0	3	1	9

- Wie ist f auf alle übrigen Netzwerkkanten fortzusetzen, so dass f ein Fluss ist? Was ist der Wert dieses Flusses?
- Zeichnen Sie das Residualnetzwerk.
- Finden Sie einen augmentierenden Pfad von s nach t und erhöhen Sie den Fluss entlang dieses Pfades um den maximal möglichen Betrag. Falls nötig, dann iterieren Sie diesen Schritt, bis der so gefundene Fluss maximal ist.
- Beweisen Sie, dass Ihr Fluss maximal ist, indem Sie einen Minimalen Schnitt im Netzwerk finden.
- Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Sei $N = (V, A, c, s, t)$ ein Netzwerk mit mindestens einem $s - t$ Pfad, und sei f ein maximaler Fluss in N . Falls keine Kantenkapazität in N ganzzahlig ist, dann ist f kein ganzzahliger Fluss.

Wir werfen 1000 faire Münzen und bezeichnen die Ergebnisse mit $X_1, \dots, X_{1000}$. Wir wollen wissen, wie viele benachbarte Paare von Münzen es gibt, die beide Kopf zeigen. Ein Paar benachbarter Münzen sind Münzen der Form X_i, X_{i+1} - hierbei zählen wir X_{1000} und X_1 auch als benachbart (man kann sich vorstellen, dass die Münzen in einem Kreis angeordnet sind.) Wir bezeichnen die Anzahl der Paare benachbarter Münzen, die beide Kopf zeigen, mit X . Wir werden im Folgenden verschiedene Ungleichungen verwenden um die Wahrscheinlichkeit abzuschätzen, dass X 'viel' grösser als sein Erwartungswert ist. Achten Sie darauf, jeweils zu erklären, warum die entsprechende Ungleichung angewendet werden kann.

- Zeigen Sie, dass $\mathbb{E} X = 250$.
- Verwenden Sie die Markov Ungleichung um $\Pr[X \geq 500]$ abzuschätzen.
- Berechnen Sie $\text{Var}[X]$ und verwenden Sie Chebychevs Ungleichung um $\Pr[X \geq 500]$ abzuschätzen.
Hinweis: Gehen Sie wie in Theoretische Übung 7 vor um die Varianz zu berechnen.
- Wir definieren Y nun als die Anzahl benachbarter Paare, die beide Kopf zeigen und deren erste Münze an ungerader Stelle liegt - wir betrachten also nur Paare X_{2i-1}, X_{2i} , wobei $i = 1, \dots, 500$. Zeigen Sie $\mathbb{E}[Y] = 125$ und verwenden Sie Chernoffs Ungleichung, um $\Pr[Y \geq 250]$ abzuschätzen.
- Verwenden Sie Chernoffs Ungleichung um $\Pr[X \geq 500]$ abzuschätzen.
Hinweis: Stellen Sie sicher, dass Chernoffs Ungleichung wirklich anwendbar ist - man benötigt hierfür einen kleinen 'Trick'.